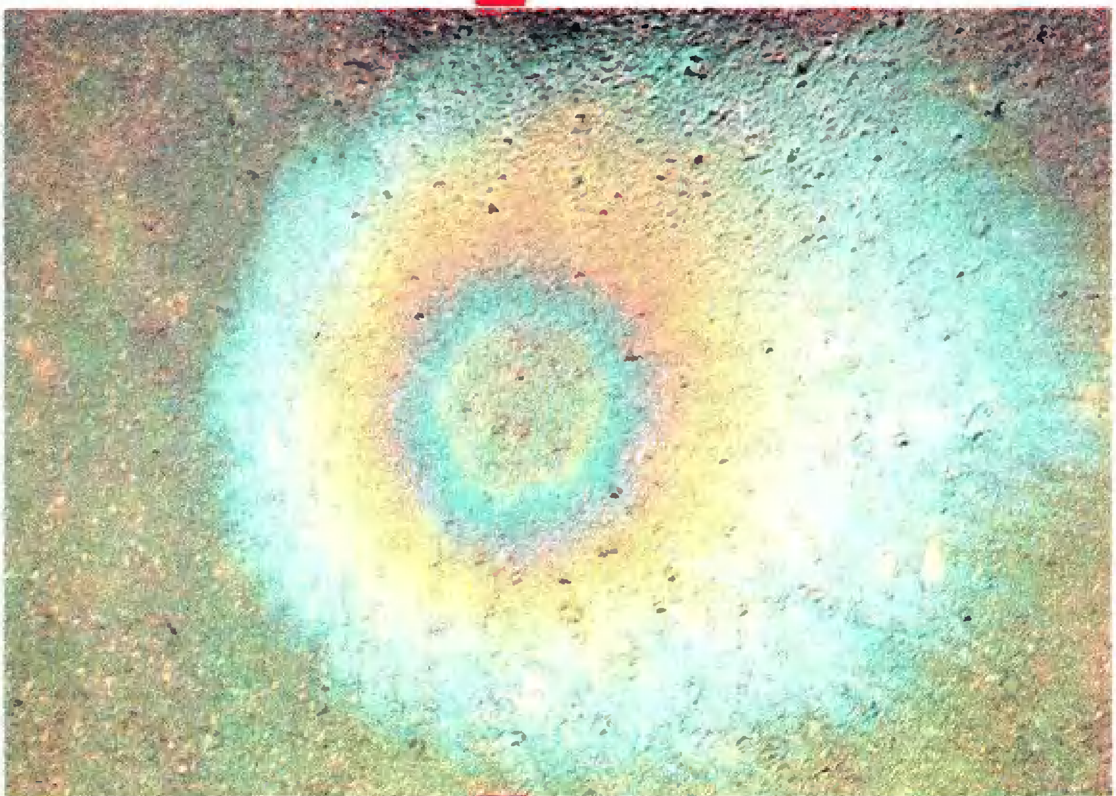
kvant.mccme.ru

ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Радуга на асфальте

1992

Квант

1992
6

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Российской академии наук, Президиум Академии педагогических наук и коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

САМОЛЕТ В ОЗОНЕ

Доктор технических наук
А. СТАСЕНКО

Исповедуя Бога Вседержителем и Творцом Мира, мы не можем не каяться в расхищении созданного Им, должны признать себя истребителями и разрушителями, не поддерживающими, а разрушающими порядок в природе.

Н. Ф. Федоров.
Философия общего дела.

Напомним, что первая часть статьи* кончалась на самом интересном месте вопросом: «Но при чем здесь озон?»

Хемосорбция окислов азота

А при том, что капли могут поглощать окислы азота, превращаясь в раствор азотной кислоты. Процесс объемного поглощения называется абсорбцией (от греческого sorbeo — поглощаю), а когда он сопровождается химической реакцией, то — хемосорбцией. Если закрыть глаза на все другие вещества в струе, то хемосорбцию окислов азота можно условно изобразить рисунком 1. Именно такие процессы и происходят в установках химической промышленности, производящих азотную кислоту.

Разумеется, струя с каплями во многом не похожа на промышленную колонку для производства азотной кислоты. Во-первых, в наземной установке практически не ограничено количество проточной воды, непрерывно хемосорбирующей окислы азота. Во-вторых, там давление окислов азота на порядки больше, чем в струе, что ускоряет процесс растворения (правда, в стратосфере температура ниже ($T_{min} \approx 217$ К), что, напротив, способствует растворению).

Легко оценить сверху концентрацию азотной кислоты в каплях струи. Поскольку концентрация газообразных окислов азота на срезе сопла раз в сто меньше, чем воды, то и концентрация азотной кислоты не будет превышать величину порядка процента.

Но, в-третьих, есть же и другие вещества, помимо окислов азота. Так что в капле вообще могут происходить все те реакции, что и в газе (см. рис. 1 в первой части статьи), но, конечно, с другими скоростями. И нужно бы учесть все эти реакции, чтобы дать ответ — сорбция веществ струи каплями воды будет увеличивать или уменьшать содержание озона в атмосфере.

Но тут важно то, что благодаря каплям появилась надежда куда-то упрятать вредные газы струи. А дальше что? А дальше эти капли могут укрупняться за счет столкновений друг с другом и слияния, могут замерзнуть и, отяжелев и падая, транспортировать эти окислы в нижние слои атмосферы, где, испарившись, вернуть их снова в воздух. Но, как известно, их добавка в нижних слоях может даже увеличить содержание озона — как это происходит в знаменитых лондонских смогах.

Но! — воскликнет вдумчивый читатель и будет совершенно прав,— ведь что-то не видно, чтобы белый хвост за самолетом опускался со своими каплями. Да, правда, не видно. Но само по себе это не доказывает, что капли исчезли: можно предположить, что при укрупнении капель хвост становится прозрачным. Вспомним: туман из мелких капель непрозрачен, а дождь, при котором воды в единице объема воздуха гораздо больше, позволяет видеть далеко.

Действительно, чтобы оценить среднюю «длину видимости» вдоль какого-нибудь луча, окружим этот луч цилиндрической поверхностью с радиусом, равным среднему радиусу ка-

* См. «Квант» № 5.

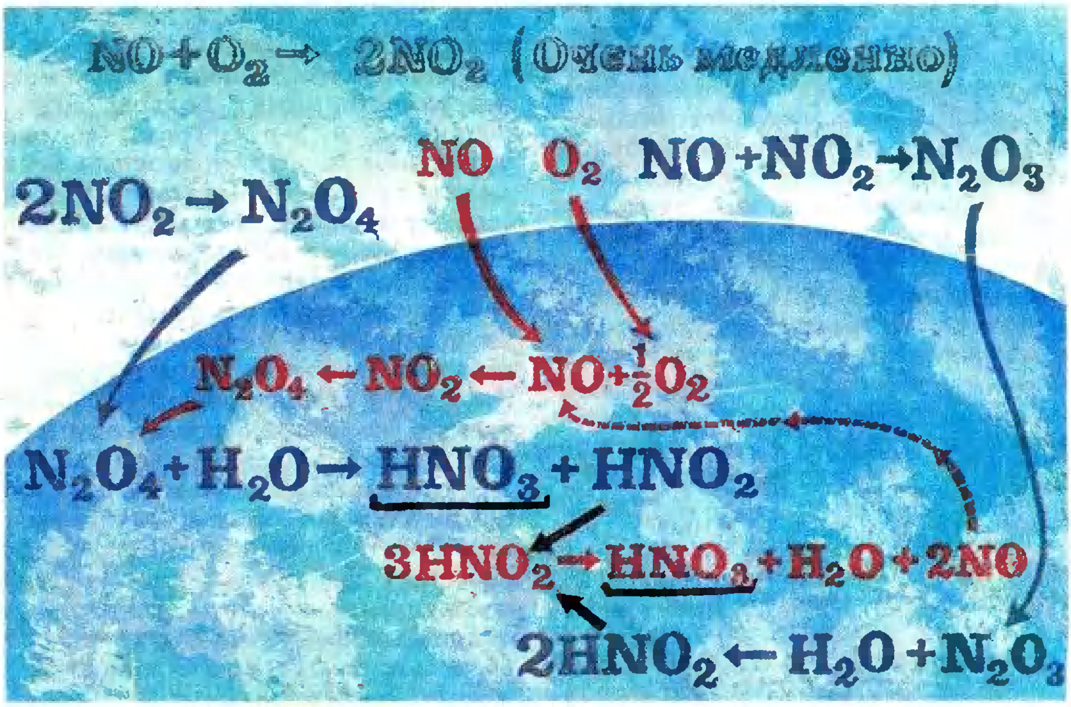


Рис. 1.

пель a. Если центр капли попадет в цилиндр, то эта капля «перекроет» луч. На длине L количество центров, попавших в цилиндр, равно $N = n\pi a^2 L$, где n — концентрация капель, $\pi a^2 L$ — объем цилиндра. Значит, средняя длина видимости равна

$$\hat{l} = \frac{L}{N} = \frac{1}{\pi a^2 n} = \frac{1}{\pi a^2 \rho_v / m} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho^0}{\pi a^2 \rho_v} \approx$$

$$\approx a\frac{\rho^0}{\rho_v},$$

где ρ^0 — плотность воды.

Таким образом, чем крупнее капли (чем больше их радиус a) при фиксированной плотности водяного пара ρ_v, тем прозрачнее облако.

Но, кроме того, струя за самолетом не бывает строго круглой со строго горизонтальной осью. Чтобы исследовать более подробно дальнейшую возможную судьбу капли с захваченными ею окислами азота, нужно сделать еще шаг вперед и рассмотреть, как крылатый летательный аппарат возмущает атмосферу.

Свободные вихри и теплые струи

Начнем с мухи. Давно известна такая школьная задача: на весах стоит закрытая непрозрачная коробка, на дне которой сидит муха — это ее состояние номер один. Запишем вес коробки с мухой. Второе состояние: муха летает (висит неподвижно в воздухе) где-то внутри коробки, не касаясь стенок. Можно ли отличить эти два состояния по показанию весов? Ответ: нельзя — весы покажут то же самое. Потому что, раз уж муха держится в воздухе коробки, она создает поток импульса — силу, направленную вниз и в точности равную ее весу. Но, коль скоро она отбрасывает воздух вниз, то он должен возвращаться к ней сверху. Возникает циркуляция воздуха в коробке, которая качественно изображена на рисунке 2, *а* синими линиями. Это очень похоже и на картину течения воздуха вокруг вертолета в режиме висения.

Пусть теперь муха или вертолет не просто висят в воздухе, а движутся вперед с постоянной скоростью V. Тогда в системе координат, связан-

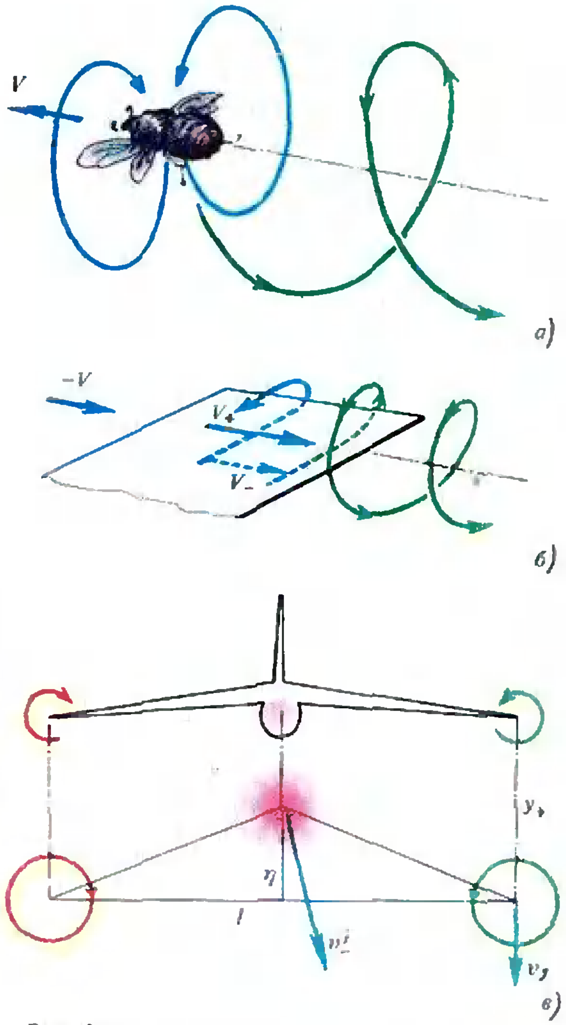


Рис. 2.

ной с их центром масс, воздух сдувается назад со скоростью $u_\infty = -V$. Порисовав картинки линий тока, можно понять, что в плоскости, перпендикулярной направлению движения, возникнут два вихря с почти параллельными осями (на рисунке 2, *а*, чтобы не загромождать картинку, изображен один из вихрей — правый с точки зрения мухи).

Самолет вызывает в атмосфере почти такое же течение воздуха, как движущаяся муха или вертолет,— только у него разделены функции: крыло создает подъемную силу, а тягу создает, в отличие от мухи, не крыло, а движитель (винт или реактивная струя).

Возникновение вихря воздуха у конца крыла можно качественно пояснить еще так. Раз уж воздух, обтекающий крыло, создал подъемную силу, значит, его давление на нижнюю поверхность крыла больше, чем на верхнюю: $p_- > p_+$. Тогда, согласно уравнению Бернулли, скорость воздуха вверху больше, чем внизу: $V_+ > V_-$ (рис. 2, *б*). А на самом конце крыла, кроме того, из-за указанного различия давлений воздух стремится перетечь снизу вверх. Если мы проследим за траекторией какой-либо частицы воздуха, то и получим спираль, сбегающую с конца крыла,— так называемый концевой, или присоединенный вихрь. На рисунке 2, *в* изображен вид сзади всего самолета и двух концевых вихрей. Таким образом, возникновение этих двух вихрей неразрывно связано с созданием подъемной силы движущимся крылом. (Конечно, это объяснение подходит для дозвукового обтекания крыла, но для наших целей и этого достаточно.)

Мощность вихря характеризуется его циркуляцией $\Gamma = 2\pi r v_\varphi$, где v_φ — окружная скорость. Считая, что при расширении вихря его мощность Γ остается постоянной, получим, что окружная скорость падает обратно пропорционально расстоянию от оси:

$$v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \qquad (1)$$

Вы сами можете «сделать» такой вихрь, открыв сливное отверстие ванны, и, подсыпая понемножку зубного порошка в разные его участки, убедиться в правильности формулы (1).

Итак, каждый из вихрей порождает в пространстве вихревое поле скоростей, в которое попадает и другой вихрь, и струя (см. рис. 3, *в*). Например, правый вихрь (самолет летит от нас) находится в том месте, где окружная скорость, индуцированная левым вихрем, равна $v_y = -\Gamma/2\pi l$ и направлена строго вниз (о чем говорит знак «минус»). В результате ось вихря опускается вниз с постоянной скоростью, а уравнение оси будет

$$y_+ = v_y t = v_y \frac{x}{u_\infty} = -\frac{\Gamma}{2\pi l u_\infty} x. \qquad (2)$$

Конечно, точно так же и левый вихрь, находясь в поле скоростей правого, будет описываться той же падающей прямой. Так как оси обоих вихрей находятся на одинаковой высоте, то нет горизонтальных компонент скоростей, и расстояние между ними сохраняется равным l.

Пусть в рассматриваемом сечении ось струи находится на расстоянии $\eta = y_j - y_{+,-}$ от горизонтальной линии, соединяющей вихри (см. рис. 2, *в*). Тогда скорость, индуцированная левым вихрем в этой точке, равна по модулю

$$v^{l}_{-}=\frac{\Gamma}{2\pi\sqrt{(l/2)^2+\eta^2}},$$

а ее вертикальная проекция

$$v^{l}_{-}\downarrow=-v^{l}_{-}\cos\alpha=-v^{l}_{-}\frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2+\eta^2}}.$$

От обоих вихрей она вдвое больше. Таким образом, ось струи находится в поле скоростей с вертикальной компонентой

$$v^{l}\downarrow=-\frac{\Gamma l}{2\pi((l/2)^2+\eta^2)}. \qquad (3)$$

Значит, если струю считать безвольной гибкой веревкой, то ось струи будет опускаться за самолетом и, учитывая, что $v^{l}\downarrow=\frac{dy}{dx}u_{\infty}$, можно найти интегрированием ее форму $y^{l}(x)$. Но и без этого интегрирования можно усмотреть одно интересное обстоятельство. Существует такое значение $\eta_{*}=\sqrt{3}\,l/2$, при котором вертикальные скорости воздуха на осях вихрей и на оси струи одинаковы ($v_y=v^{l}\downarrow$). Это значит, что по достижении ординаты $\pm\eta_{*}$ вихри и струя остаются параллельными (рис. 3, пунктир для знака «+»).

Но есть еще одна сила, действующая на струю и направленная вверх,— сила Архимеда. Струя теплее окружающей атмосферы и напоминает дирижабль, наполненный газом (воздухом) немного меньшей плотности (ведь, согласно закону Менделеева — Клапейрона, $\rho\sim 1/T$ при постоянном давлении). Для оценки скорости всплывания заменим непрерывное колоколообразное распределение температуры и плотности по радиусу струи ступенчатым, при котором их значения внутри цилиндра некоторого радиуса r_e будем считать постоянными и равными значениям на оси T_m, ρ_m, а вне этого цилиндра — значениям в невозмущенной атмосфере T_{∞}, ρ_{∞} (см. рис. 3). Таким образом, будем считать, что кусок струи длиной Δx помещен в легкий целлофановый цилиндрический пакет с теплонепроницаемыми стенками и этот пакет (дирижабль или монгольфьер) испытывает в холодной атмосфере выталкивающую вверх силу Архимеда

$$\Delta F_{\text{A}}=(\rho_{\infty}-\rho_m)\,g\pi r_e^2\Delta x.$$

Здесь $\pi r_e^2\Delta x$ — объем выделенного участка струи длиной Δx, на которой струю можно считать приблизительно цилиндрической — хотя мы-то уже знаем, что она расширяется. Но, поскольку $\rho_{\infty}=p_{\infty}\text{M}/(RT_{\infty})$, $\rho_m=p_{\infty}\text{M}/(RT_m)$, то получим

$$\Delta F_{\text{A}}=\rho_{\infty}g\pi r_e^2\Delta x\,\frac{T_m-T_{\infty}}{T_m}.$$

Таким образом, сила Архимеда пропорциональна квадрату радиуса сечения струи и разности температур струи и атмосферы.

Пусть эта сила привела к движению струи вверх с постоянной скоростью $v\uparrow$. Тогда возникнет уравновешивающая сила аэродинамического сопротивления, которая, как уже много раз говорилось, пропорциональна плотности обтекающего воздуха, квадрату скорости и площади сечения $S_{\perp}=\Delta x\cdot 2r_e$, перпендикулярного вектору $\vec{v}\uparrow$:

$$\Delta F_a=\rho_{\infty}v\uparrow^2 S_{\perp}=\rho_{\infty}v\uparrow^2 2r_e\Delta x.$$

Из равенства сил F_{A} и F_a, учитывая, что $T_m(x)\sim 1/x$ и $r_e\sim\sqrt{x}$, получим

$$v\uparrow^2\sim\frac{1}{r_e}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow v\uparrow\sim x^{-1/4}.$$

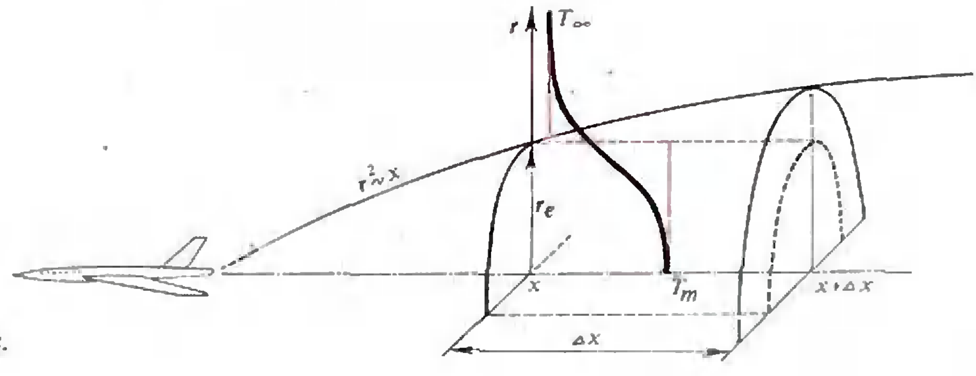


Рис. 3.

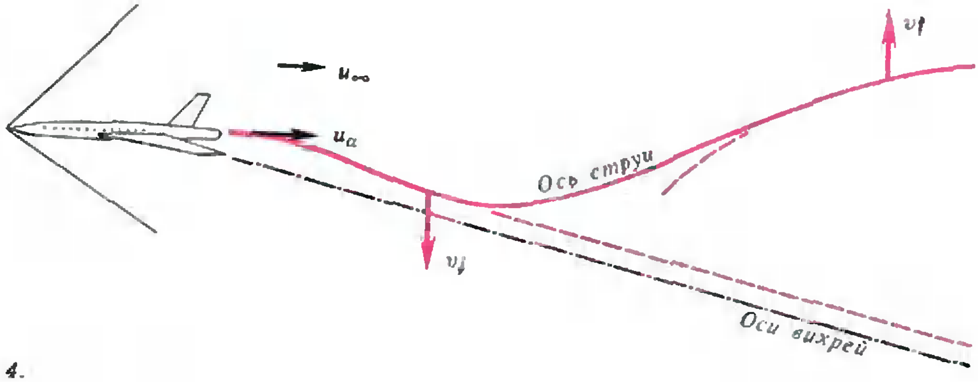


Рис. 4.

Если из-за этой силы плавучести струя «вырвется» из-под влияния вихрей (как видно из формулы (3), скорость, индуцированная вихрями, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния), то ее движение будет определяться в основном силой Архимеда. Можно записать

$$\frac{dy^j}{dx} = \frac{v\uparrow}{u_\infty} \sim \frac{x^{-1/4}}{u_\infty},$$

откуда после несложного интегрирования получим $y^j \sim x^{3/4}$. В результате ось струи будет иметь вид кривой, качественно изображенной на рисунке 4 сплошной линией.

Теперь пора оглянуться на все, что мы тут натворили, и, как говорят в приличном обществе, «извиниться» за все, чего мы не учли. Во-первых, сама вихревая нить, как и струя, будет ведь тоже «расплываться» из-за трения друг о друга слоев, вращающихся с разными окружными скоростями вокруг оси, значит, вихрь будет диффундировать в радиальном направлении, и радиальная зависимость его окружной скорости станет сложнее, чем (2). Во-вторых, поле скоростей вихря будет влиять не только на óси струй, но и на их периферию, поскольку струя ведь не есть линия, она имеет характерный поперечный размер, и разные элементы струи будут по-разному «сдуваться» вихрем относительно оси струи. В-третьих, струя после торможения в атмосфере вообще может начать распадаться на отдельные участки, которые будут всплывать вверх отдельными комками, а не в виде цилиндра. И многое другое мы не учли из того, что может влиять на эволюцию отдельной капли, на возможность слияния капель друг с другом, на скорость осаждения всего капельного следа вместе с захваченными им окислами азота. Но это смогут учесть наши читатели, когда станут большими и грамотными.

Заключение

Итак, вредны ли будущие стратосферные авиалайнеры для озона Земли? Да, но ведь вредно почти все, что делает Человечество, начиная с его дыхания. Мы дышим — получается углекислый газ, и животные тоже дышат — а растениям приходится его поглощать, возвращая кислород в атмосферу,— вот вам и равновесие. Следовательно, важно сравнить ожидаемый вред с тем, что творится в Природе. Известно, что до сих пор извержения вулканов вносят в атмосферу существенно больше окислов азота, чем вся мировая авиация. И в будущем, когда парк коммерческих самолетов станет сравнимым с природными источниками по скорости производства вредных примесей, все равно трудно будет выяснить измерениями, ктó именно портит воздух. Поэтому и теперь и впредь важным средством определения вклада авиации в эту проблему будут служить теоретические оценки, основанные на физико-химико-математических моделях процесса. Вроде тех, которые проиллюстрированы в этой статье.

Может быть, дальнейшие исследования покажут, что вся эта проблема озона не столь трагична, как это представили нервные журналисты, убоявшись «озоновой дыры» над Антарктидой. Часть ученых считает, что и проблемы-то нет: солнечное излучение, говорят они, поглощается всей атмосферой, а не только озоном. А народные приметы прямо свидетельствуют о пользе слабого раствора азотной кислоты для урожая,— конечно, в других терминах: если весной или в начале лета пройдут грозовые дожди — урожай будет хороший. Тут дело в том, что, хотя атмосфера состоит в основном из азота, ни одно растение усваивать его из воздуха не способно, а может лишь из соединений с другими элементами. Грозовой дождь и создает такие условия — при разрядах молнии азот воздуха образует химические соединения, которые, растворяясь в каплях дождя, превращаются в азотную кислоту слабой концентрации, а она реагирует с природными минералами и высвобождает питательные вещества, в частности фосфор и калий, необходимые для бурного роста растений. Но ведь все это чем-то похоже на события, происходящие в струе самолета. Так что не исключено в третьем тысячелетии появление новой народной поговорки: «Пролетел по весне над огородом гиперзвуковой лайнер — жди по осени большой тыквы».

Читатель ↔ журнал

Вот уже несколько лет мы каждые три месяца публикуем нашу анкету (есть она и в этом номере). Ведь журнал делается для вас, наших читателей, и чтобы он оставался интересным и полезным, нам нужна ваша помощь.

Что же показали полученные нами анкеты за 1991 год?

Конечно, очень приятно было узнать, что большинству тех, кто ответил на наши вопросы, нравится «Квант». Его называют хорошим, очень хорошим и даже отличным. Спасибо на добром слове!

Интересно, что в этом году больше всего анкет прислали ученики одиннадцатых классов (33 %). На втором месте десятиклассники (28 %), затем — девятиклассники (15 %) и восьмиклассники (10 %). В прошлые годы чаще откликались школьники 7—9 классов.

По-прежнему наибольшей популярностью пользуются постоянные наши рубрики «Задачник «Кванта», «Школа в «Кванте», «Практикум абитуриента» и «Калейдоскоп «Кванта». Ненамного отстают от них «Фантастика», «Квант» для младших школьников», «Варианты вступительных экзаменов» и «Математический кружок».

Лучшими статьями 1991 года были названы следующие:

И. Акулич «Странный император и странный полководец» (№ 2);
И. Депман, Н. Виленкин «Числовые фокусы» (№ 2);
А. Мигдал «Вычисления без вычислений» (№ 3);
В. Николаев «25 из 30» (№ 4);
Дж. Уокер «Как кипит вода?» (№ 5);
И. Депман «Совершенные числа» (№ 5);
Р. Винокур «О водяном звере и акустическом резонансе» (№ 7);
И. Лалаянц, А. Милованова «Физика против мошенников» (№ 8);
Я. Стюарт «Сказка о рождественской теореме Ферма» (№ 9);
В. Сурдин, С. Ламзин «Формула рождения звезд» (№ 10);
Ю. Носов «Голографическая память» (№ 10);
Б. Гурович, Р. Малков «Как обмануть интеграл» (№ 12).

Если разложить ваши отклики «по пожеланиям», в самую солидную стопу соберутся предложения по разделу «Информатика и программирование». Одни просят расширить раздел. Другие просят задач. Третьим надоел микрокалькулятор, который они решительно называют «вчерашним днем вычислительной техники» (о, как они правы!). Словом, информатика интересует очень многих. При этом рейтинг рубрики оказался одним из самых низких. Это наводит на серьезные размышления. Мы надеемся, что нам удастся поправить положение, а насколько это получится у редакции — покажут ваши анкеты в нынешнем году.

Второе место среди пожеланий занимает просьба «давайте больше задач». Кому — занимательных, кому — трудных, а кому — нерешенных. Сложно выполнить эти требования, не превращая журнал в задачник, но мы попытаемся.

Просят больше писать об астрофизике и астрономии. Просят больше фантастики. Хотят видеть больше материалов о современных научных достижениях и больше статей о знаменитых ученых и по истории науки. Выпускники требуют больше информации о вузах у нас и за рубежом. И еще — больше информации о новых книгах. Больше, больше, больше!.. Мы согласны с вашими доводами, дорогие читатели, мы готовы удовлетворить ваши просьбы, но в нашем распоряжении всего 80 страниц. Поймите и не обижайтесь, если именно ваше хорошее, толковое предложение не удастся осуществить.

ПРОГУЛКА ДО ТЕОРЕМЫ ЧЕБЫШЁВА

В. УФНАРОВСКИЙ

Не так уж и трудно задачи решать:
Проблема дает вдохновенье.
Искусство же в том, чтоб суметь отыскать
Задачу, когда есть решенье.

П. Хэйн. Груки)*

Есть особая прелесть в прогулках «куда глаза глядят»: идешь, сам не зная куда, и вдруг встречаешь что-то совсем неожиданное, чего и в голову не могло прийти, когда начинал прогулку. Давайте и мы прогуляемся по одной хитрой математической тропинке.

Мы начнем ее с признака делимости на 9: *число n делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9*. Можно даже более внушительно: *если от числа n отнять его сумму цифр, которую мы обозначим $\sigma(n)$, то результат всегда будет делиться на 9*.

А теперь присядем и поговорим об обозначениях. От их выбора, как ни странно, зависит очень и очень многое, поэтому в обозначениях математики всегда достаточно консервативны. Например, обозначение n любому математику скажет, что речь идет о целых, скорее всего, натуральных числах (кстати, а какое у нас?). Неспроста мы выбрали и обозначение σ — как-никак это маленькая буква «сигма», а большая Σ издревле используется для обозначения сумм. У нас сумма маленькая, так что и букву возьмем маленькую.

Посмотрим на обозначения еще с одной стороны. Вы, конечно, знаете, арабы пишут не так, как мы — слева направо, а, наоборот, справа налево. Но задумывались ли вы о том, что сами-то мы с числами обращаемся по-арабски — справа налево. Ну да, не поверите вы, ведь числа мы пишем слева направо. Это да. А складываете вы как? С какой цифры начинаете, с первой или с последней? А умножаете? Попробуйте наоборот! Это неудивительно, цифры и обозначения у нас, как известно, арабские. В действительности удобнее было бы писать и цифры справа налево, но что поделаешь: привычка — вторая натура. Чтобы обойти привычку, будем записывать число в другой форме — не через цифры, а через разложение в степени десятки, скажем, не 234, а $4+3\cdot10+2\cdot100$. Против этого наша привычка не восстает, поэтому запишем и наше число n в таком виде:

$$n=a_0+a_1\cdot10+a_2\cdot10^2+\ldots+a_k\cdot10^k,$$

где a_0 — последняя цифра, a_1 — предпоследняя, ..., a_k — первая, так что всего цифр $(k+1)$, а их сумма равна

$$\sigma(n)=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_k.$$

Ну а теперь ничего не стоит доказать наше утверждение:

$$n-\sigma(n)=(a_0-a_0)+$$
$$+a_1(10-1)+a_2(10^2-1)+\ldots$$
$$\ldots+a_k(10^k-1)=0+9a_1+99a_2+\ldots$$
$$\ldots+99\ldots9a_k,$$

что, конечно же, делится на 9 (кстати, сколько девяток в последней записи?).

Налюбовавшись результатами своего труда, продолжим прогулку. Что еще можно получить так же просто, не особенно напрягаясь? Можно менять одно из трех: задачу, доказательство и обозначения. Доказательство менять не хочется. Можем ли мы поменять задачу? Да, нетрудно придумать и доказать признак делимости на 11 — только сумму нужно брать знакочередующуюся ($a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots$). Если копнуть глубже, то получится что-то вроде универсального признака делимости (докажите его в качестве упражнения).

З а д а ч а. *Пусть m — натуральное число и $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — остатки чисел $10, 10^2, \ldots, 10^k$ при делении на m. Тогда число*

$$n-(a_0+a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_kp_k)$$

делится на m.

При $m=9$ получаем уже доказанный ранее результат. А как насчет 11? Для $m=7$ получаем последовательность $\{p_i\}$: 3, 2, 6; 4, 5, 1, 3, 2 и т. д. Поэтому остаток от 1992 при

*) С груками П. Хэйна наши читатели смогут познакомиться в одном из ближайших номеров. *(Прим. ред.)*

делении на 7 равен остатку $2+9\cdot3+9\cdot2+1\cdot6=53$, что в свою очередь равно остатку $3+5\cdot3=18$, что в свою очередь... Пожалуй, можно остановиться и сказать, что это 4. Не слишком интересно...

Пойдем в другую сторону — попробуем поменять обозначения. Как еще можно обозначить наше число n? Тот, кто хоть немного знаком с программированием, сразу скажет — надо использовать другую систему счисления, например, двоичную:

$$n=b_0+b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+\ldots+b_m\cdot 2^m,$$

где b_i — это нули и единицы. (Например, $25=1+0\cdot2+0\cdot4+1\cdot8+1\cdot6$.) Тут тоже своя сумма цифр: $\sigma_2(n)=b_0+b_1+b_2+\ldots$ (Цифра 2, конечно же, намекает на основание системы счисления, так что наша σ — это σ_{10}.)

Соответствующая теорема звучит так: $n-\sigma_2(n)$ делится на... А, в самом деле, на что? В десятичной системе делилось на $9=10-1$, значит, здесь должно делиться на $2-1=1$. Факт верный, но малоценный. А может, попробовать в общем случае, в p-ичной системе счисления, где p — произвольное основание? Запишем

$$n=a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_kp^k$$
$$(\text{где } a_i<p)$$

и обозначим

$$\sigma_p(n)=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_k,$$

получается красивая

Теорема 1. *$n-\sigma_p(n)$ делится на $(p-1)$.*

Докажем. Это очень просто — рассуждение не меняется: разность

$$n-\sigma_p(n)=$$
$$=(a_0-a_0)+a_1(p-1)+a_2(p^2-1)+\ldots$$
$$\ldots+a_k(p^k-1),$$

разумеется, делится на $(p-1)$.

Например, в восьмиричной системе счисления число, записанное как 124, делится на 7. Проверим?

$4+2\cdot8+1\cdot64=84$ — действительно, на 7 делится. Вот вам и новый признак делимости на 7. Жаль только, что к восьмиричной системе счисления мы не больно-то привычные.

Куда бы дальше пойти? Что бы еще извлечь из делимости? А что если... действительно поделить? В самом деле, вполне достойный вопрос: чему равно частное от деления:

$$\delta_p(n)=\frac{n-\sigma_p(n)}{p-1}\,?$$

Интересно... Начнем хотя бы с $p=2$, там хоть делить не надо. Составим для начала табличку:

n_{10}	n_2	$\sigma_2(n)$	$\delta(n)=n-\sigma_2(n)$
0	0	0	0
1	1	1	0
2	10	1	1
3	11	2	1
4	100	1	3
5	101	2	3
6	110	2	4
7	111	3	4
8	1000	1	7
9	1001	2	7
10	1010	2	8
11	1011	3	8
12	1100	2	10

Что мы видим? При каждом нечетном n число $\delta(n)$ не меняется, на четном — меняется. А на сколько? Ага, как раз на столько, сколько нулей в конце двоичной записи числа n. А число это, как известно, есть максимальная степень двойки, на которую делится n. Например, $n=12$ делится на $4=2^2$, и шагнули мы на 2 — от 8 до 10. Значит, мы можем сказать, что $\delta(n)$ как бы считает, сколько степеней двойки есть в числах $1, 2, \ldots, n$ или, лучше сказать, в произведении $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, которое обозначается обычно $n!$ и называется *факториалом числа n*. Итак, вроде бы верен следующий факт: $\delta(n)=n-\sigma(n)$ *есть максимальная степень двойки, на которую делится число* $n!$ Докажем?

В бой, ясное дело, просится индукция. Для малых n все видно из таблицы. Давайте осуществим индукционный переход. Допустим, что для $(n-1)$ мы нужный результат уже получили: $(n-1)-\sigma_2(n-1)$ есть максимальная степень двойки, на которую делится число $(n-1)!$ Докажем для n. Число $n!$ отличается от $(n-1)!$ только тем, что оно в n раз больше. Значит, появится ровно столько новых степеней двойки, сколько их есть в числе n, а это как раз число нулей в конце двоичной записи числа n. А как насчет $n-\sigma_2(n)$ по сравнению с $(n-1)-\sigma_2(n-1)$? Само n по сравнению с $(n-1)$ увеличилось на 1. А как изменится $\sigma_2(n)$ по сравнению с $\sigma_2(n-1)$? Допустим, что в конце двоичной записи числа n стоит k нулей: ...1000...0. Тогда $(n-1)$ имеет вид ...0111...1 с k единицами на конце (разве что ноль может и отсутствовать). Значит, единиц стало на $(k-1)$ меньше, а общее изменение равно $1-(-(k-1))$, что как раз равняется k и тем самым индукционный переход оказывается верным.

Куда дальше? Ну, конечно, интересно — верно ли это в общем случае, т. е. правда ли, что

$$\delta_p(n)=\frac{n-\sigma_p(n)}{p-1}$$

есть максимальная степень p, делящая $n!$.

Упражнение 1. Докажите это для $p=3$.

Увы, при $p=4$ нас ждет разочарование. Число $6!$ делится на 4^2, но $\delta_4(6)=(6-3)/3=1\neq 2$. Причину мы откроем очень быстро — необходимо, чтобы p было простым.

Упражнение 2. Докажите справедливость утверждения для любого простого p.

К счастью, для решения вопросов о делимости кроме простых чисел нам больше ничего и не нужно. Но что нам делать с факториалами, куда приспособить только что полученные знания? Конечно же, в первую очередь, для биноминальных коэффициентов $C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}$ (которые иногда обозначают и по-другому: $\binom{n}{i}$).

Главная формула, с которой они связаны,— это бином Ньютона:

$$(x+y)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\ldots$$
$$\ldots+C_n^{n-1}xy^{n-1}+y^n.$$

Для большей симметрии используем такое обозначение:

$$C_{m+n}^n=\frac{(m+n)!}{n!m!}.$$

Теперь, благодаря полученным знаниям, мы способны определить, на какую степень простого числа p делится данный биномиальный коэффициент. Она в точности равна

$$\frac{(m+n)-\sigma_p(m+n)-(n-\sigma_p(n))-(m-\sigma_p(m))}{p-1}=$$
$$=\frac{\sigma_p(m)+\sigma_p(n)-\sigma_p(m+n)}{p-1}.$$

Красиво! Например, если $\sigma_p(m+n)=\sigma_p(m)+\sigma_p(n)$, то C_{m+n}^n на p не делится, и наоборот. Любопытно, а когда такое бывает? Ну хотя бы тогда, когда при сложении в p-ичной системе счисления чисел m и n переносов из разряда в разряд не происходит. Скажем, если сложить числа, записанные в семиричной системе счисления как 23 и 32, то получим 55 без переносов. Вывод: так как $3+2\cdot 7=17$, $2+3\cdot 7=23$, то C_{40}^{17} на 7 не делится.

А если перенос есть? Допустим, в каком-то разряде i. Скажем, у m было число $r<p$, у n — число $s<p$, а их сумма $r+s$ оказалась больше p. Тогда в следующий разряд перейдет 1, а в этом — вместо $r+s$ будет записано $r+s-p$. Тем самым в числе $m+n$ сумма цифр за счет i-го разряда будет на $(p-1)$ меньше, чем $\sigma_p(m)+\sigma_p(n)$. Да, как забавно — как раз на $(p-1)$ мы и делим. Так ведь это замечательно! Как мы сразу не догадались — верна следующая

Теорема 2. *Если p — простое число, то максимальная степень p, делящая C_{m+n}^n, равна количеству переносов при сложении чисел m и n в p-ичной системе счисления.*

Вот до какой теоремы мы добрели! Чтобы извлечь из такого неочевидного факта? Глаза разбегаются. Ну давайте простоты ради начнем с изучения C_{2n}^n — самого большого биномиального коэффициента среди всех, входящих в разложение бинома $(x+y)^{2n}$. (Кстати, а можете ли вы доказать, что он и впрямь самый большой?) Максимальная степень p, на которую он делится, равна количеству переносов, получающихся при сложении n с самим собой в p-ичной системе счисления. Допустим, что $n<p<2n$.

Тогда n в p-ичной системе записывается одной p-ичной «цифрой» (собственно n), а $2n$ — двумя, скажем, $2n=r+1\cdot p$. Это значит, что происходит ровно один перенос и, следовательно, p входит в C_{2n}^n ровно один раз. Таким образом, произведение всех простых чисел, заключенных между n и $2n$, не превосходит C_{2n}^n. Нельзя ли получить что-то попривлекательнее? Оценим C_{2n}^n грубо.

Если положить в биноме Ньютона $x=y=1$, то получится, что

$$1+C_{2n}^1+C_{2n}^2+\ldots+C_{2n}^n+\ldots+C_{2n}^{2n-1}+1=2^{2n},$$

откуда

$$C_{2n}^n<4^n.$$

Точно таким же образом произведение всех простых чисел между $n/2$ и n меньше $4^{n/2}$, между $n/4$ и $n/2$ — меньше $4^{n/4}$ и т. д. Тогда произведение всех простых чисел между 1 и n меньше

$$4^{n/2}\cdot 4^{n/4}\cdot 4^{n/8}\cdot\ldots=4^{n/2+n/4+n/8+\ldots}<4^n.$$

В итоге мы бесплатно получили совсем неочевидный факт:

Теорема 3. *Произведение всех простых чисел, меньших n, не превосходит 4^n.*

Упражнение 3. Докажите это строго: мы слишком небрежно делили пополам, «забыв», что бывают и нечетные числа. (Возможно, что лучший способ строгого подхода — индукция.)

Пусть теперь $p\leqslant n$. Тогда в разложении n по крайней мере две p-ичные цифры. Если в разложении $2n$ их ровно две, то $2n<p^2$ и заведомо происходит не более одного переноса. Следовательно, верна

Лемма 1. *Если $p>\sqrt{2n}$, то максимальная степень p, делящая C_{2n}^n, не превосходит 1.*

Интересно, а когда делимости нет вообще? Так как $2n<p^2$, то $n=a_0+a_1p$, где $a_0<p$, $a_1<p/2$. Чтобы не было переносов, должно быть $a_0<p/2$. В частности, при $a_1=1$ получаем, что если $a_0=n-p<p/2$, то p не является делителем C_{2n}^n. Отсюда следует

Лемма 2. *Если $n\geqslant p>2n/3$, то p не является делителем C_{2n}^n $(n>2)$.*

Доказательство. $n<p+p/2=3p/2$, откуда $p>2n/3$.

Прикинем теперь, что происходит при малых значениях $p\leqslant\sqrt{2n}$. Там переносов уже может быть несколько, но во всяком случае не больше чем k, если $2n=a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_kp^k$. Так как $2n\geqslant p^k$, то $\log_p 2n\geqslant k$, и мы можем сказать, что максимальная степень p, делящая C_{2n}^n, не превосходит $\log_p 2n$. Значит, для произвольного p справедлива

Лемма 3. *Пусть $N=p^m$ является делителем C_{2n}^n. Тогда $N\leqslant 2n$.*

Доказательство. $p^m\leqslant p^{\log_p 2n}=2n$.

Ну вот, теперь мы более или менее представляем себе структуру числа C_{2n}^n. Его разложение на степени простых чисел состоит из трех типов сомножителей:

1) Простые числа, большие n (и, естественно, меньшие $2n$) — каждое по одному разу.

2) Простые числа, меньшие $2n/3$, но большие $\sqrt{2n}$,— каждое не более одного раза.

3) Простые числа, меньшие $\sqrt{2n}$. Тут возможна делимость на p^k с $k>1$, но все равно полный вклад p^k каждого такого простого числа не превосходит $2n$.

Интересно, а может ли быть так, что первая группа отсутствует, т. е. между n и $2n$ нет простых чисел?

Тогда все сосредоточено во второй и третьей группах. Можем ли мы оценить их реальный вклад? Произведение всех чисел второй группы, по теореме 3, не превосходит $4^{2n/3}$. Простых чисел в третьей группе заведомо меньше чем $\sqrt{2n}-1$, так что их общий вклад, по лемме 3, не превосходит $(2n)^{\sqrt{2n}-1}$. В итоге: если между n и $2n$ нет простых чисел, то справедливо неравенство

$$C_{2n}^{n}<4^{2n/3}\cdot (2n)^{\sqrt{2n}-1}. \qquad (*)$$

Какая мысль! Ведь если мы докажем, что это неравенство ложно, то одновременно докажем знаменитый постулат Бертрана: между n и $2n$ всегда имеется хотя бы одно простое число. Попробуем оценить C_{2n}^{n}. Коль скоро это самый большой из биномиальных коэффициентов, входящих в бином $(1+1)^{2n}$, и так как их всего там $2n+1<4n$, то заведомо $C_{2n}^{n}>\frac{4^n}{4n}$. Из полученных неравенств следует, что

$$\frac{4^n}{4n}<4^{2n/3}\cdot (2n)^{\sqrt{2n}-1},$$

$$4^{n/3}<2\cdot(2n)^{\sqrt{2n}},$$

$$n/3<\sqrt{2n}\log_4 2n+\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{n}<\sqrt{18}\log_4 2n+\frac{1}{2}.$$

Но хорошо известно, что логарифм — функция медленная и $\sqrt{n}$ ее обгонит. Осталось понять когда. Прикинем, что будет при $n=1000$. Заведомо, $\sqrt{1000}>30$, $\log_4 2000<\log_4 4096=\log_4 4^6=6$, т. е. $30<\sqrt{18}\times 6+\frac{1}{2}$, что неверно. Значит, при $n=1000$ и (как вы, надеемся, легко с помощью производной докажете) для $n>1000$ неравенство (*) — ложное. Значит, для этих значений n справедлива

Теорема Чебышёва (постулат Бертрана). *Между n и $2n$ всегда имеется хотя бы одно простое число.*

Хорошо, а что делать с маленьким n? Там же, вроде бы, неравенство верно. Ну и бог с ним — постулат-то Бертрана тоже верен — и в этом легко убедиться, попросту просмотрев таблицу простых чисел или написав махонькую программку. Если хотите, можно и иначе — проявив больше щепетильности к оценкам, получить более точное неравенство (см., например, книгу В. Серпинского «250 задач по элементарной теории чисел»). Это уж дело вкуса.

Но, пожалуй, наша прогулка затянулась. Пора и отдохнуть, а если вы еще захотите прогуляться — для затравки несколько задачек.

1. Докажите, что для простого p и любых целых x, y число $(x+y)^p-x^p-y^p$ делится на p.

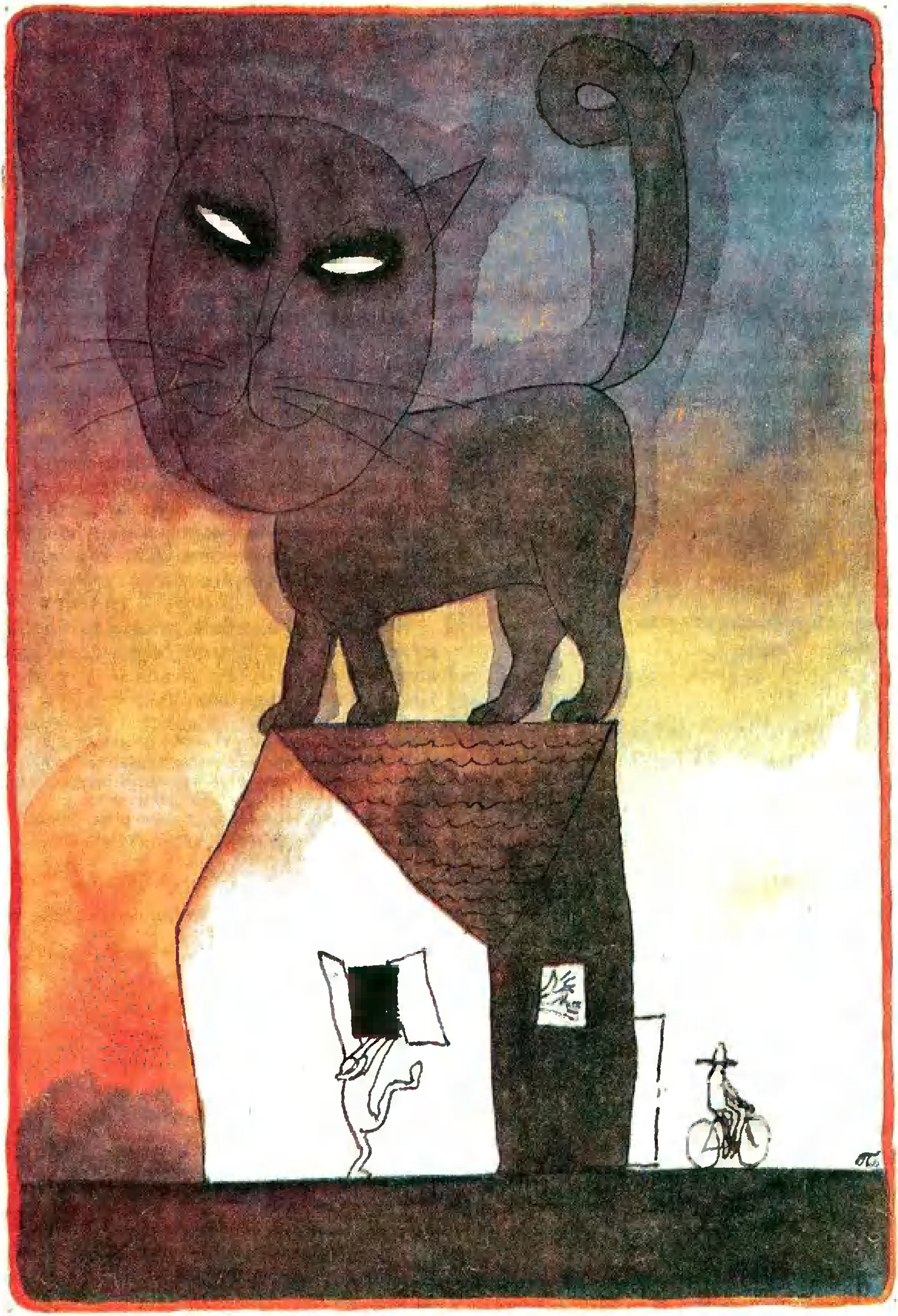
2. Обобщите предыдущую задачу на случай нескольких слагаемых и выведите отсюда малую теорему Ферма: x^p-x делится на p.

3. Докажите, что если $N=p^m$ — степень простого числа p делит биномиальный коэффициент C_n^l, то $N\leqslant n$.

4. Докажите, что есть два простых числа между n и $2n$ для $n>5$.

5. Докажите, что если p_k — k-е по счету простое число, то $p_{k+2}<2p_k$.

6. Докажите, что $n!$ не является степенью никакого числа при любом $n>1$.



ЗАКОН КИРХГОФА

Кандидат педагогических наук
Я. АМСТИСЛАВСКИЙ

Изучение закономерностей свечения нагретых тел — теплового, или температурного, излучения — сыграло особую роль в развитии физической науки. Достаточно упомянуть, что исследования именно теплового излучения положили начало всей квантовой теории. Один из основополагающих законов теплового излучения был сформулирован немецким физиком Кирхгофом в 1859 году. О нем наш рассказ.

Может ли черное быть светлым?

Вначале о «черном». Понятие «черное» в физике связывают со свойством тел поглощать падающее на них излучение (в видимой или какой-либо иной части спектра). Чем тело чернее, тем бóльшую долю излучения это тело поглощает. Абсолютно черное тело — ниже мы будем называть его сокращенно а. ч. т.— поглощает все падающее на него излучение целиком, причем во всех областях спектра. Понятие, противоположное «черному»,— «белое». Чем больше тело отражает, тем меньше оно поглощает и тем менее черным оно оказывается.

Теперь о «светлом». Под светлым телом понимают такое, которое много излучает (в видимой или другой части спектра). Причем чем больше тело излучает, тем оно светлее. Противоположным понятием «светлому» является «темное». Светлое тело излучает много, темное — мало.

Таким образом, «черное» и «светлое» (так же, как «черное» и «темное») — понятия разного «порядка». Они затрагивают различные свойства тел. Важный вопрос заключается в том, связаны ли эти свойства между собой. Если такая связь существует и имеет универсальный характер, то, зная поглощательные свойства тела, можно предсказать, как данное тело будет излучать в тех или иных условиях.

Из повседневного опыта мы хорошо знаем, что одно и то же тело при разной температуре излучает по-разному. Достаточно вспомнить, как сильно изменяется видимое глазом излучение нити накала электрической лампочки при увеличении тока: от едва заметного вишнево-красного свечения при $T = 800$ К к ослепительно белому калению при $T = 2800$ К. Не менее разительные превращения, обязанные своим происхождением изменению температуры тела, каждый из читателей, конечно же, неоднократно наблюдал, рассматривая (возможно, без должного интереса) коптящее пламя. Раскаленные до высокой температуры (порядка 1800 К) «черные» частички угля (сажа) ярко светятся и образуют в совокупности желтые язычки пламени (здесь черное оказывается светлым), но такие же черные частички сажи, не сгоревшие и успевшие охладиться, образуют в совокупности темные, как смоль, язычки копоти (а здесь уже черное стало темным). Очевидно поэтому, что сопоставление поглощательных и испускательных свойств различных тел необходимо производить при одинаковых температурах тел.

В обычной жизни мы чаще наблюдаем тела при комнатной температуре. Причем нередко в наше поле зрения попадают и черные (для видимой или более широкой спектральной области) тела. Это может быть черная материя, кусок угля, закопченный предмет, оперение птиц, отверстие норы или пещеры, гнездо в скале и т. д. При сопоставлении черного тела с расположенными по соседству с ним нечерными телами мы видим, что первое оказывается темным, тогда как нечерные тела — значительно более светлыми. Отсюда нередко делается подсознательный вывод о том, что черное — всегда темное, причем чем чернее — тем темнее. Этот вывод глубоко ошибочен.

Все легко объясняется, если учесть два обстоятельства. Во-первых, тела мы всегда сравниваем при дневном или электрическом освещении (никто ведь не делает это темной ночью или в затемненном помещении) и воспринимаем мы совсем не собственное температурное излучение тел, а рассеянный ими свет «чужого» высокотемпературного излучателя — Солнца или лампы накаливания. Нечерные тела, в отличие от черных, сильно рассеивают это «чужое» излучение, а потому и кажутся светлыми. Во-вторых, наблюдаем мы обычно невооруженным глазом. Этот чудесный прибор чувствителен, однако, только к видимой области — ничтожному участку спектра электромагнитного излучения. А при комнатной температуре в этой области ни одно тело не излучает практически ничего!

Анализ вопроса о связи поглощательных и излучательных свойств тел и привел Кирхгофа к важному выводу, который получил название закона Кирхгофа. Его можно сформулировать так: *чем больше при данной температуре тело поглощает, тем больше оно и испускает (чем тело чернее, тем оно светлее).*

Чтобы записать закон Кирхгофа, сформулируем понятие поглощательной и испускательной способностей. Под поглощательной способностью $A_{\lambda,T}$ тела будем понимать долю падающего излучения с длиной волны λ, которая поглощается данным телом, находящимся при абсолютной температуре T. Поглощательная способность — величина безразмерная, принимающая в зависимости от свойств тела значение в интервале от 0 до 1. Причем $A=0$ в случае абсолютно белого тела*) и $A=1$ в случае а. ч. т.

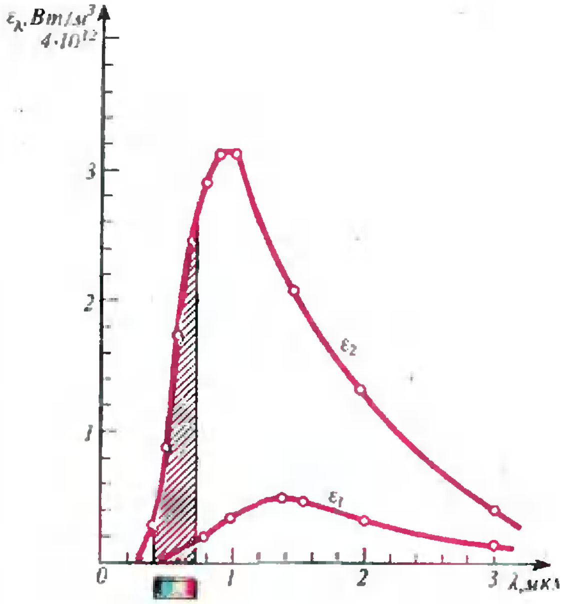


Рис. 1.

Под излучательной способностью $E_{\lambda,T}$ понимают энергетическую величину, равную мощности, излучаемой данным телом в пределах единичного спектрального интервала длин волн вблизи λ*) с единицы площади поверхности нагретого тела при температуре T.

Предположим, что мы имеем несколько тел с разными $A_{\lambda,T}$, причем среди них есть и а. ч. т., и абсолютно белое тело. Пусть все тела нагреты до одной и той же достаточно большой температуры T. Из закона Кирхгофа следует, что наши тела будут излучать по-разному, ярче всех будет светиться а. ч. т., тогда как белое тело будет совершенно темным. Выделим а. ч. т., обозначив $E_{\lambda,T}^{\text{а. ч. т.}}=\varepsilon_{\lambda,T}$, $A_{\lambda,T}^{\text{а. ч. т.}}=a=1$. Очень важно, что излучение а. ч. т. не только самое интенсивное при данной температуре, но и имеет строго определенный спектральный состав. Иначе говоря, функция $\varepsilon_{\lambda,T}$ представляет собой универсальную функцию λ и T. С учетом приведенной выше

*) Или в случае абсолютно зеркального тела (идеального зеркала). Абсолютно белая поверхность рассеивает все падающие лучи равномерно по всем направлениям, а абсолютно зеркальная отражает все лучи.

*) Во избежание недоразумений отметим, что «в пределах единичного спектрального интервала» не означает, что $\Delta\lambda$ равно, скажем, 1 метру. Имеется в виду, что мощность излучения пропорциональна $\Delta\lambda$: $\Delta W/(\Delta S\Delta t)=E_{\lambda,T}\Delta\lambda$, где ΔW — энергия, излученная в интервале длин волн $\Delta\lambda$ за время Δt с площадки ΔS.

формулировки и данных определений запишем закон Кирхгофа в виде

$$E_{\lambda,T}=A_{\lambda,T}\varepsilon_{\lambda,T}\,. \qquad (1)$$

Вид функции $\varepsilon_{\lambda,T}$ был найден теоретически немецким физиком М. Планком в 1900 году. По Планку,

$$\varepsilon_{\lambda,T}=2\pi c^2 h\lambda^{-5}\left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1\right)^{-1}, \qquad (2)$$

где $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света в вакууме, $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, $k=1{,}38\times\times10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

При фиксированной температуре тела T функции A, E, ε зависят только от λ. В этом случае их обозначают соответственно A_λ, E_λ, ε_λ. График функции Планка для двух температур $T_1=2000$ К и $T_2=3000$ К приведен на рисунке 1.

Может ли красное стать синим?

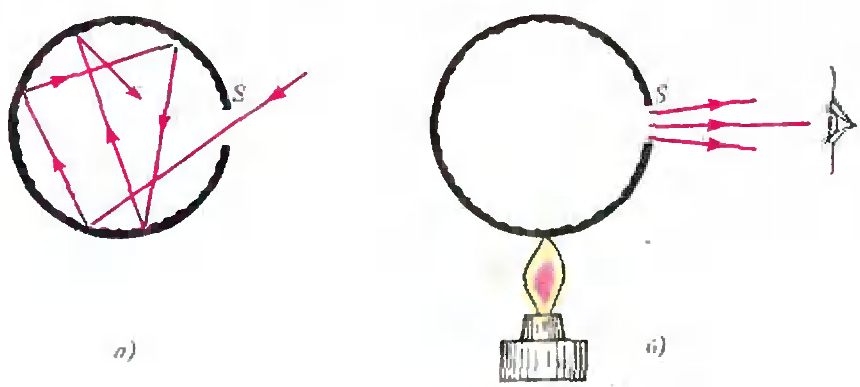
Наиболее удобной моделью а. ч. т. является малое отверстие в замкнутой оболочке из тугоплавкого или огнеупорного материала. Температуру тела изменяют при помощи электрического или какого-либо другого нагревателя. Форма оболочки существенной роли не играет.

Обратимся к модели а. ч. т. в виде полой сферы из тугоплавкого металла с зачерненной внутренней поверхностью (рис. 2). Луч света, падающий извне на отверстие S, проходит внутрь полости и, испытывая многократные отражения, быстро ослабевает и из полости практически не выходит, причем это имеет место *для любой* части спектра и при любой температуре. Следовательно, отверстие S нашей модели обладает свойствами а. ч. т. Может показаться, что, поглощая все, отверстие не излучает ничего. Это — глубокое заблуждение. Отверстие действительно не излучает ничего «чужого». Но, поглощая все падающее излучение и полностью «перерабатывая» его, а. ч. т. формирует свое *собственное излучение*, соответствующее данной температуре T. Из закона Кирхгофа следует, что по сравнению с излучением любого *другого* тела, нагретого до той же температуры T, излучение отверстия S будет наиболее сильным. Первым, кто предложил использовать отверстие в замкнутой оболочке в качестве абсолютно черного излучателя, был сам Кирхгоф (1859 г.). Однако лишь много лет спустя экспериментальные исследования температурного излучения на модели а. ч. т. стали традиционными.

Обсудим три примера, иллюстрирующих закон Кирхгофа.

1. Предположим, что внешняя поверхность сферы (см. рис. 2) *отполирована* до блеска и обладает зеркальными свойствами в широкой спектральной области. Что увидит наблюдатель, рассматривающий эту сферу со стороны отверстия S, при двух состояниях тела: а) при комнатной температуре ($T=300$ К) и б) при *температуре* белого каления ($T==3000$ К)?

а) Для исключения маскирующего влияния «*чужого*» излучения будем



а) б)

Рис. 2.

проводить наблюдения в хорошо затемненном помещении. Но, рассматривая наше тело в таких условиях невооруженным глазом, мы не увидим ничего, потому что при $T=300$ К в пределах видимой части спектра ($0{,}4\cdot10^{-6}$ м $\leqslant\lambda\leqslant 0{,}76\cdot10^{-6}$ м) функция Планка ε_λ, в соответствии с формулой (2), имеет исчезающе малую величину. Тем не менее, тело, нагретое до $T=300$ К, все-таки излучает, причем больше всего в той части спектра, где функция ε_λ достигает максимума, а именно на длине волны $\lambda^m=10\cdot10^{-6}$ м (10 мкм), что соответствует средней части инфракрасной области спектра. Исходя из закона Кирхгофа, можно сделать вывод, что в инфракрасных лучах отверстие S должно ярко «светиться» на темном фоне остальной части сферы. Но «увидеть» такую картину мог бы только глаз, который имел бы высокую чувствительность в области 10 мкм, или глаз, вооруженный подходящим преобразователем инфракрасного излучения в видимое.

б) При нагревании тела до температуры белого каления функция ε_λ в видимой части спектра резко возрастает. Как следует из формулы (2), при изменении T от T_1 до T_2 излучательная способность а. ч. т. в данной спектральной области λ возрастает в

$$\frac{\varepsilon_{\lambda,\,T_2}}{\varepsilon_{\lambda,\,T_1}}=\exp\frac{hc}{\lambda k}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\ \text{раз.}$$

(Этот результат легко получается из (2), если учесть, что $\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)\gg 1$.)

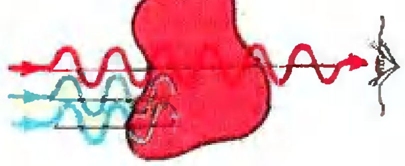
Для середины видимой области спектра ($\lambda=0{,}55\cdot10^{-6}$ м) при $T_2=3000$ К и $T_1=300$ К ($T_2/T_1=10$) имеем

$$\frac{\varepsilon_{\lambda,\,T_2}}{\varepsilon_{\lambda,\,T_1}}=e^{78}=10^{34}!$$

Поэтому теперь никакого преобразователя излучения не требуется, и ярко светящееся отверстие S мы увидим на темном фоне остальной части тела уже непосредственно невооруженным глазом («чем чернее, тем светлее»).

2. Предположим, что мы имеем цветной камень — тугоплавкий минерал, который при рассматривании на просвет кажется красным (рис. 3, *а*), поскольку он сильно поглощает голубые, синие и фиолетовые лучи, для которых $A_\lambda=1$, и прозрачен для красно-оранжевой части спектра, где $A_\lambda=0$. Для определенности предположим также, что с повышением температуры область интенсивного поглощения практически не смещается по спектру. Будет ли светиться этот камень при его нагревании, например, до $T=3000$ К? Если да, то будет ли свечение окрашенным и как?

При $T=3000$ К функция Планка ε_λ в видимой области спектра достаточно велика, и по закону Кирхгофа на участках сильного поглощения, где $A_\lambda=1$, накаленный минерал должен давать интенсивное свечение: $E_\lambda=A_\lambda\varepsilon_\lambda$. Поскольку сильное поглощение захватывает только коротковолновую часть видимой области спектра, это свечение должно быть окрашенным и иметь сине-голубой цвет (рис. 3, *б*).


а)

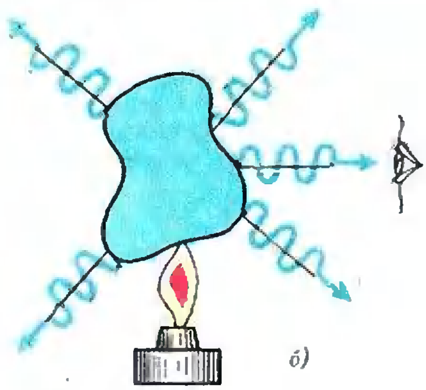

б)

Рис. 3.

Интересный опыт с плавленым кварцем осуществил американский физик-экспериментатор Р. Вуд в начале XX века. В видимой области спектра плавленый кварц прозрачен, и поглощение здесь практически отсутствует, т. е. $A_\lambda=0$. Поэтому столбик плавленого кварца, нагретый на газовой горелке, остается темным, несмотря на высокую температуру. Вуд «окрасил» плавленый кварц — добавил к нему некоторое количество окиси неодима и приготовил однородный расплав. Известно, что растворы редких земель (и в том числе — неодима) имеют узкие области сильного поглощения в видимой части спектра. Естественно поэтому, что и в окрашенном расплаве кварца также появились полосы поглощения. У неодима они располагаются в красной, оранжевой и зеленой частях спектра. Если теперь столбик из такого расплава нагреть на той же газовой горелке, что и ранее, то, в отличие от первого случая, он заметно светится. Вуд исследовал это свечение с помощью спектроскопа и убедился в том, что оно состоит из ярких полос как раз в красной, оранжевой и зеленой частях спектра.

3. Известно, что некоторые кристаллические вещества по-разному поглощают свет, поляризованный в разных плоскостях. Для одного направления световых колебаний коэффициент A_λ больше, а для другого (при тех же λ и T) — меньше. Классическим примером такого вещества является турмалин — одноосный окрашенный (часто — зеленый) тугоплавкий кристалл, который сильнее поглощает обыкновенные колебания (рис. 4, *а*). Поэтому при толщине в несколько миллиметров такой кристалл представляет собой изготовленный самой природой поляризатор: он пропускает свет с колебаниями, лежащими практически в одной плоскости. Вопрос сводится к следующему. Какими поляризационными свойствами обладает свечение накаленного кристалла турмалина?

Для обыкновенных (*o*) и необыкновенных (*e*) колебаний (от англ. ordinary и extraordinary) коэффициент A_λ различен (для *o*-колебаний он больше). Поэтому *o*- и *e*-колебания по-разному будут представлены и в излучении. Из закона Кирхгофа следует, что свечение накаленного турмалина должно быть частично поляризованным с заметным преобладанием *o*-колебаний (рис. 4, *б*). Именно этот результат впервые наблюдал сам Кирхгоф при качественном исследовании излучения накаленного турмалина (1859 г.). Более поздние количественные исследования явления, выполненные уже в начале XX столетия, хорошо подтвердили соотношение $A^e/A^o=E^e/E^o$.

Могут ли три ватта равняться ста ваттам?

Одно из важных применений нагретых тел — использование их в качестве источников света. Вспомним, например, лампы накаливания, кото-

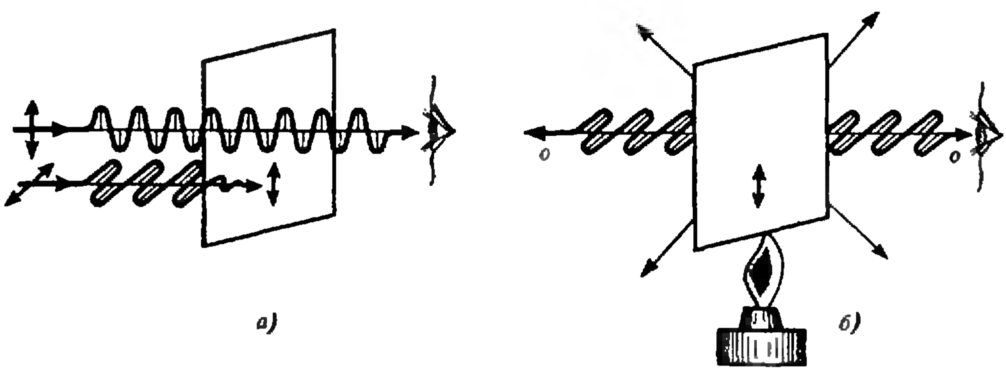


Рис. 4.

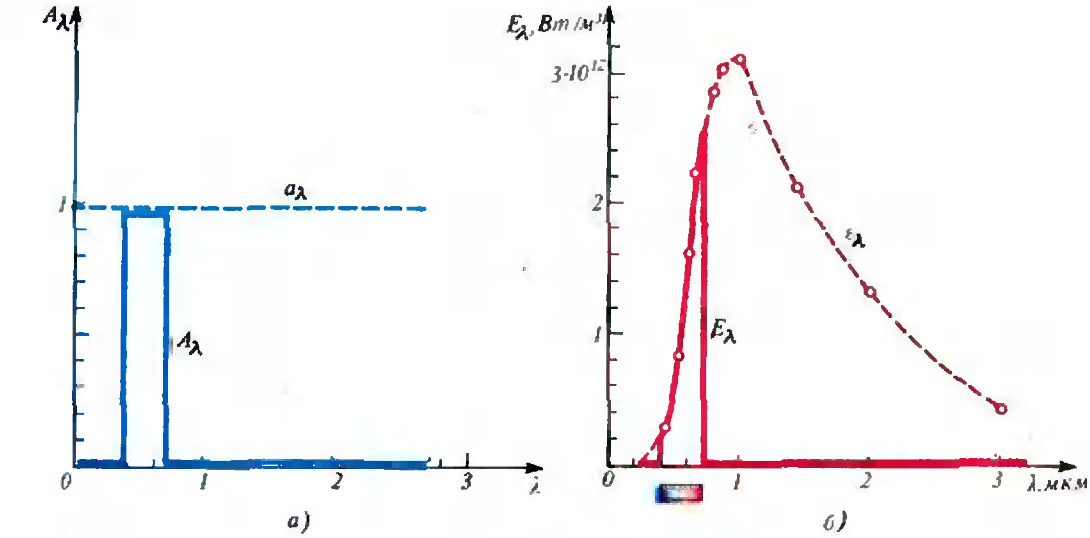


Рис. 5.

рые среди разнообразных источников света и сегодня играют важную роль. Переходя к обсуждению светотехнических приложений закона Кирхгофа, отметим, что в излучении а. ч. т. на видимую часть спектра (заштрихованная часть графика на рис. 1) приходится очень малая доля общей энергии излучения: при $T=2000$ К — около 0,3%, при $T=3000$ К эта величина возрастает до 3 %, оставаясь по-прежнему слишком малой. В случае вольфрамового излучателя, как это будет показано ниже, положение дел чуть-чуть лучше. Однако из-за неизбежных дополнительных потерь на теплопроводность и конвекцию КПД современных вольфрамовых ламп накаливания практически не превосходит 2—3 %. Это значит, что в лучшем случае 97 % подводимой к такой лампе мощности летит, так сказать, «в трубу».

Теперь немного пофантазируем. Предположим, что создан или найден тугоплавкий (например, до $T=3000$ К) электропроводящий материал с сильным поглощением при высокой температуре в видимой области спектра ($A_\lambda=1$) при практически полном отсутствии поглощения во всех остальных частях спектра ($A_\lambda=0$). Из закона Кирхгофа следует, что использование такого материала в качестве рабочего тела лампы накаливания обеспечило бы экономию огромных мощностей. Действительно, светоотдача подобной лампы мощностью в несколько ватт соответствовала бы светоотдаче современной 100-ваттной лампы.

В плане обсуждаемой проблемы интерес представляет следующая задача. Какой вид должна иметь функция A_λ для достижения максимально возможной светоотдачи при условии: наибольшей для данного значения T яркости источника или сочетания высокой яркости источника с наиболее благоприятным для человеческого глаза цветовым составом излучения?

Назовем источники, удовлетворяющие требуемым свойствам, соответственно S_1 и S_2. Искомые функции A_λ для них изображены на рисунках 5,*а* и 6,*а*, а излучательные способности E_λ — на рисунках 5,*б* и 6,*б*. Из закона Кирхгофа следует, что оба источника по своей экономичности оказываются идеальными — они излучают только видимый свет, так как вне этой области $A_\lambda=0$. Но бо́льшую яркость при данной температуре имеет источник S_1, который излучает свет как а. ч. т. Однако этот свет имеет красноватый оттенок, обусловленный преобладанием теплых тонов, поскольку E_λ быстро возрастает с

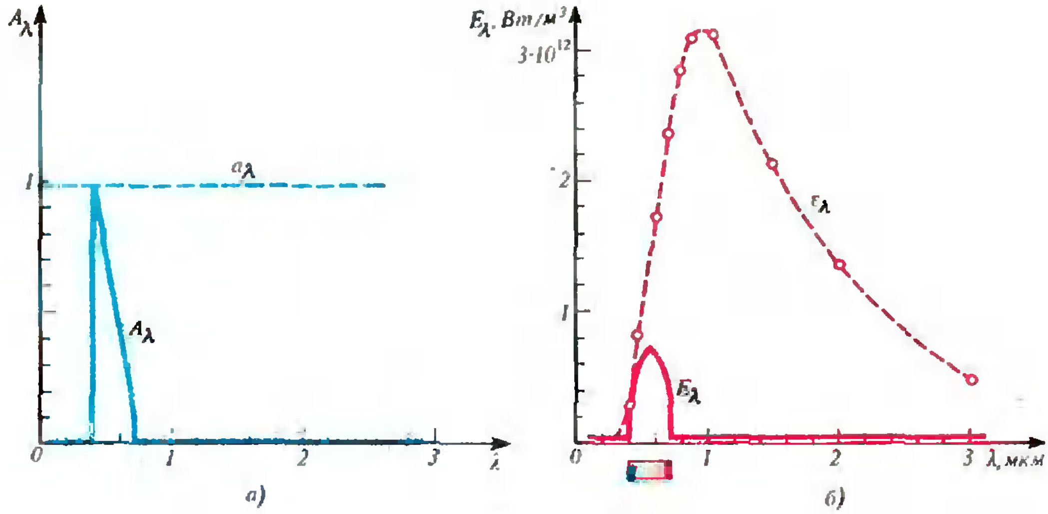


Рис. 6.

увеличением λ. В излучении источника S_2 теплые тона ослаблены за счет уменьшения A_λ в длинноволновой части спектра, и распределение энергии близко́ к распределению световой энергии в спектре Солнца. Свет источника S_2 оказывается более «белым» и более благоприятным для человеческого глаза. (Не исключаю, что кто-нибудь из читателей предложит еще более удачный вариант источника). Нетрудно видеть, что появление такой лампы, как S_1 или S_2, повлекло бы за собой революционные изменения в светотехнике. Но для достижения такого результата необходимо было бы предварительно совершить революцию в технологии — научиться изготавливать материалы с наперед заданными свойствами (коэффициентом поглощения, тугоплавкостью и т. д.).

Реальные тепловые источники света, к сожалению, мало сходны с рассмотренными выше идеальными сверхэкономичными источниками S_1 или S_2. Хотя иногда можно обнаружить и общие элементы. В этом плане небезынтересно упомянуть ауэровскую горелку. Как излучатель видимого света и инфракрасных лучей среднего диапазона ауэровская горелка получила известность еще в начале XX столетия и в наши дни представляет скорее исторический интерес. Тем не менее, свойства этого излучателя достаточно любопытны. Основной частью горелки является тугоплавкий сетчатый колпак, нагреваемый в газовом пламени до 1800 К. Сетка изготавливается из окиси тория с добавлением небольшого количества (от 0,75 до 2,5 %) окиси церия. Наличие окиси церия обеспечивает сильное, практически как у а. ч. т., поглощение во всей видимой области спектра и близкое к а. ч. т. поглощение в средней инфракрасной области, тогда как в ближней инфракрасной области поглощение практически отсутствует. Поэтому в излучении ауэровской горелки выпадает наиболее энергетичная в спектре а. ч. т. при $T=1800$ К ближняя инфракрасная область, и при небольшом суммарном излучении эта горелка представляет собой сильный, почти как а. ч. т., источник видимого света и инфракрасных лучей среднего диапазона.

Перейдем к лампам накаливания. Основным материалом, используемым в качестве рабочего тела современной лампы накаливания, является вольфрам. Зависимости A_λ и E_λ для вольфрама при $T=2450$ представлены на рисунке 7. Как видно из рисунка, вольфрам излучает значительно мень-

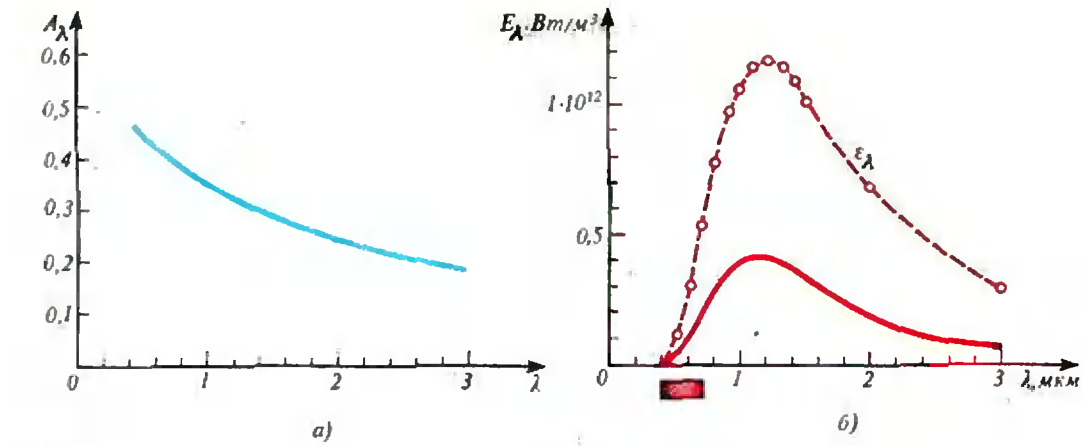


Рис. 7.

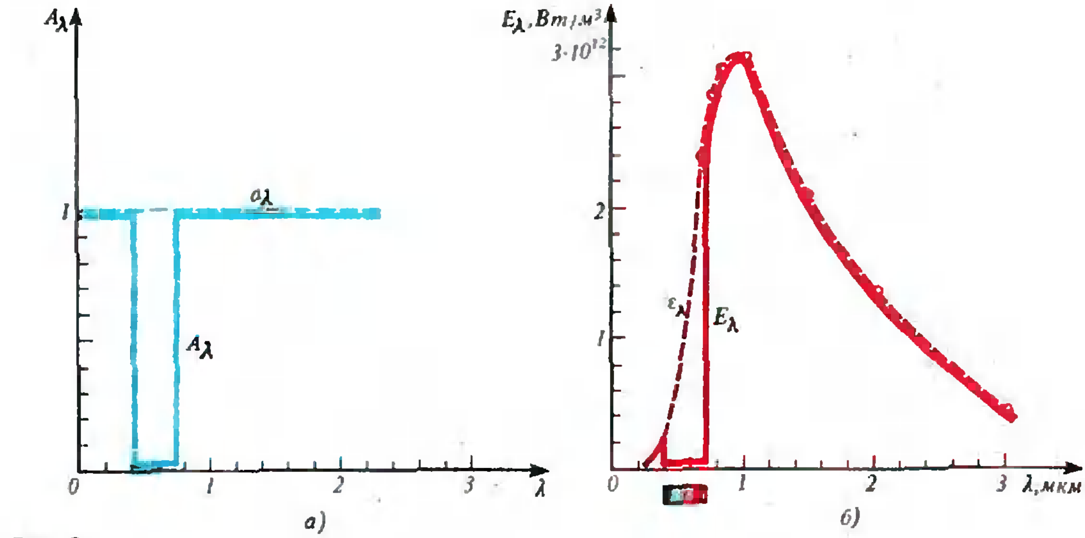


Рис. 8.

ше, чем а. ч. т. при той же температуре, по всему широкому спектру. Причем в видимой области — вдвое меньше, что для источника света, конечно, плохо. Но, вместе с тем, в инфракрасной области вольфрам излучает втрое — впятеро меньше, чем а. ч. т., что для источника света уже хорошо, поскольку при этом существенно снижается потребляемая им мощность. Резюмируя, можно сказать, что, будучи не столь ярким излучателем света, как а. ч. т. при той же температуре, вольфрамовая лампа оказывается несколько более приятным для глаза и заметно более экономичным источником. Правда, ее КПД остается очень низким и, как уже говорилось, практически не превосходит 3 %. Естественно, что увеличение КПД ламп накаливания даже на несколько процентов при сохранении их достоинств явилось бы уже заметным достижением в области светотехники.

В заключение, дорогой читатель, небольшой контрольный вопрос.

На рисунке 8 изображены кривые A_λ и E_λ для некоторого нагретого тела. Что можно сказать об этом теле и его излучении?

Задачник „Кванта"

Задачи

М1346—М1350, Ф1353—Ф1357

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 августа 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1346» или «Ф1353». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задача Ф1353 предлагалась на XVIII Всероссийской олимпиаде по физике, а задачи Ф1355 и Ф1356 — на Межреспубликанской физической олимпиаде 1992 года.

М1346. Внутри окружности радиусом 1 расположена замкнутая (самопересекающаяся) ломаная, содержащая 51 звено, причем длина каждого звена равна $\sqrt{3}$. Для каждого угла этой ломаной рассмотрим треугольник, двумя сторонами которого служат стороны этого угла (таких треугольников всего 51). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше, чем утроенная площадь правильного треугольника, вписанного в данную окружность.

А. Берзиньш

М1347. Имеется 100 серебряных монет, упорядоченных по весу, и 101 золотая монета, также упорядоченные по весу. Известно, что все монеты различны по весу. В нашем распоряжении — двухчашечные весы, позволяющие про каждые две монеты установить, какая тяжелее. Как за наименьшее число взвешиваний найти монету, занимающую по весу 101-е место? Укажите это число и докажите, что меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя.

А. Анджанс

М1348. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Стороны B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны, соответственно, отрезкам PA, PB, PC. Через точки A_1, B_1, C_1 проведены прямые, параллельные соответственно BC, CA и AB. Докажите, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$.

В. Прасолов

М1349*. Круг разбит на n секторов. В некоторых из них стоят фишки; всего фишек $n+1$. Затем позиция подвергается следующим преобразованиям: берутся какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляются в разные стороны в соседние сектора. Докажите, что после некоторого числа таких преобразований не менее половины секторов будет занято фишками.

Д. Фомин

М1350*. Пусть n и b — натуральные числа. Через $V(n;\ b)$ обозначим число разложений n в произведение (одного или нескольких) сомножителей, каждый из которых больше b (например: $36=6\cdot6=4\cdot9=3\cdot3\cdot4=3\cdot12$, так что $V(36;\ 2)=5$). Докажите, что $V(n;\ b)<n/b$.

Н. Васильев

Ф1353. Найдите минимально возможный период обращения космического корабля вокруг Земли, зная, что видимый с Земли угловой размер Солнца $\alpha = 9{,}3\cdot10^{-3}$ рад.

М. Гаврилов

Задачник „Кванта"

Ф1354. Шайба массой M скользит по льду со скоростью v_0 и налетает на неподвижную шайбу, масса которой $2M$. После удара первая шайба останавливается, а вторая начинает двигаться. Она достигает бортика и, упруго от него отразившись, ударяет первую шайбу «в лоб». Найдите скорости обеих шайб после этого. Считайте, что при соударении шайб в тепло переходит определенная часть максимальной энергии деформации.

А. Варгин

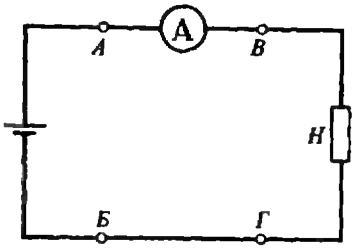


Рис. 1.

Ф1355. Нагреватель для аквариума H подключен к батарее последовательно с амперметром, который показывает ток 0,1 А (рис. 1). К точкам A и $Б$ подключили резистор, после чего ток упал до 0,05 А. Резистор отключили от A и $Б$ и подключили к точкам B и $Г$ — ток в этом случае составил 0,3 А. Найдите КПД схемы во всех трех случаях. Сопротивления амперметра и проводов пренебрежимо малы.

Примечание: КПД схемы — это отношение мощности нагревателя к полной мощности, производимой батареей.

З. Рафаилов

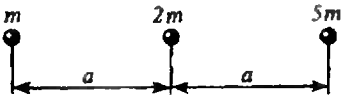


Рис. 2.

Ф1356. Три маленьких заряженных шарика закреплены на одной прямой, расстояния между соседними шариками a (рис. 2). Массы шариков m, $2m$ и $5m$, заряды их q, q и $2q$ соответственно. Шарики отпускают. Найдите их скорости после разлета на большие расстояния.

А. Зильберман

Ф1357. При помощи фотоаппарата «Смена» делают снимок светящейся точки с расстояния 1 м. Рука фотографа дрожит, и вместо точки на пленке получается небольшое пятно. Оцените размеры этого пятна, если амплитуда смещения любой точки фотоаппарата не превышает 1 мм. Фокусное расстояние объектива 50 мм. Выдержку считайте большой.

А. Ященков

Решения задач

М1316—М1220, Ф1333—Ф1337

***М1316.** Докажите, что арифметическая прогрессия из различных натуральных чисел, ни одно из которых не содержит в своей десятичной записи цифры с, состоит а) при $c \neq 0$ не более чем из 72 чисел, б) при $c = 0$ не более чем из 80 чисел. Достигаются ли эти оценки?*

Пусть a_1, a_2, ...— бесконечная арифметическая прогрессия, первый член a_1 и разность d которой — натуральные числа.

Известна несложная задача на доказательство: *для любой данной цифры с найдется член прогрессии, в записи которого встречается с.* Мы же должны доказать более тонкое утверждение: такой член найдется уже среди $a_1, \ldots, a_{73}$ (при $c \neq 0$) или среди $a_1, \ldots, a_{81}$ (при $c = 0$).

Если в k-м справа разряде у натурального числа N стоит цифра c, то остаток от деления N на 10^k лежит на промежутке $[c \cdot 10^{k-1};\ (c+1) \cdot 10^{k-1})$.

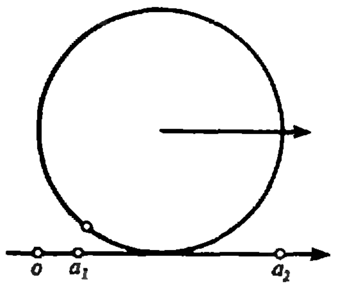


Рис. 1.

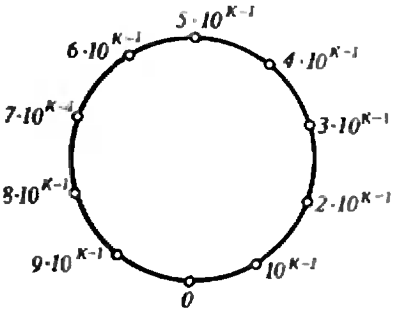


Рис. 2.

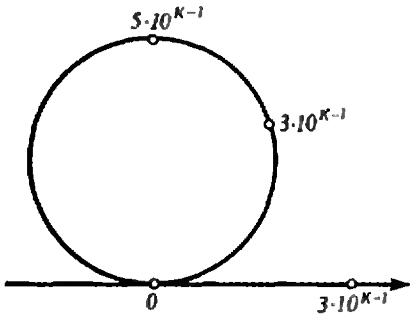


Рис. 3.

Поэтому естественно изучить остатки членов прогрессии при делении на числа вида 10^k, для чего рассмотрим еще одну достаточно известную задачу.

Пусть точки числовой оси, соответствующие членам нашей прогрессии, окрашены и оставляют отпечатки на окружности, катящейся вправо (рис. 1). Спрашивается, как они расположатся на окружности, если ее длина равна произвольному натуральному числу l? Оказывается, что отпечатки разделят окружность на равные дуги, длина каждой дуги будет равна $d'=(d, l)$ — наибольшему общему делителю чисел d и l; число таких дуг будет равно $l'=\left|\frac{l}{d'}\right|$. Докажем это. Для совпадения отпечатков членов прогрессии a_{n_1} и a_{n_2} необходимо и достаточно, чтобы разность $a_{n_1}-a_{n_2}=(n_1-n_2)d$ делилась на l, что, в свою очередь, равносильно делимости на l' разности n_1-n_2. В самом деле, l' и d взаимно просты, поэтому для делимости $(n_1-n_2)d$ на l (и, следовательно, на l') необходима и достаточна делимость на l' сомножителя n_1-n_2. Всего, таким образом, будет ровно l' различных отпечатков, разбивающих окружность на l' дуг. А так как расстояние между любыми двумя членами прогрессии кратно d (и, следовательно, кратно d'), то на окружности оно равно целому числу дуг длины d'. Отсюда следует, что расстояние (по окружности) между любыми двумя отпечатками кратно d', а между любыми двумя соседними отпечатками равно d'.

Вернемся к исходной задаче. Окружность длины $l=10^k$ разобьем на 10^k равных частей и занумеруем точки деления числами $0, 1, 2, \ldots, 10^k-1$ против часовой стрелки. (На рисунке 2 отмечены концы особо интересующих нас промежутков вида $[c\cdot 10^{k-1}; (c+1)\cdot 10^{k-1})$ для $c=0, 1, \ldots, 9$.) Пусть в начальный момент числовая ось и окружность касаются друг друга в своих нулевых точках, причем окружность расположена «выше» оси (рис. 3).

Ясно, что если эту окружность достаточно долго катить вправо, то отпечатки на ней появятся во всех точках, соответствующих остаткам членов прогрессии при делении на 10^k и только в них. Количество отпечатков (остатков) для окружности длины 10^k будем обозначать l'_k.

Как мы установили, эти остатки располагаются на окружности равномерно, и имеет место соотношение

$$l'_k=\frac{10^k}{(d, 10^k)}. \qquad (1)$$

Если цифра c отсутствует в k-м разряде всех членов прогрессии, то на дуге $[c\cdot 10^{k-1}; (c+1)10^{k-1})$ на рисунке 2 не появится ни одного отпечатка. Отсюда $l'_k<10$, поскольку отпечатки распределяются по окружности равномерно. Из (1) видно, что l'_k — делитель 10^k, поэтому $l'_k\neq 9$ и неравенство $l'_k<10$ на самом деле означает, что $l'_k\leqslant 8$.

С другой стороны, последовательность чисел l'_1, l'_2, l'_3, ... неограничена (поскольку $l'_k=\frac{10^k}{(d,10^k)}\geqslant\frac{10^k}{d}$, а число d постоянно). В частности, найдется k такое, что

$$l'_k\geqslant 10. \qquad (2)$$

Пусть k_0 — наименьший из номеров членов последовательности, удовлетворяющих (2). Тогда $l'_{k_0}\leqslant 80$.

В самом деле, если $k_0=1$, то $l'_{k_0}=l'_1=\frac{10}{(d,10)}\leqslant 10<80$. Если же $k_0\geqslant 2$, то $l'_{k_0}=\frac{10^{k_0}}{(d,10^{k_0})}\leqslant\frac{10^{k_0}}{(d,10^{k_0-1})}=10\cdot\frac{10^{k_0-1}}{(d,10^{k_0-1})}=10l'_{k_0-1}\leqslant 10\cdot 8=80$ (так как из $l'_{k_0-1}<10$ следует, что $l'_{k_0-1}\leqslant 8$).

Пункты а) и б) задачи рассмотрим теперь по отдельности.

а) Пусть $c\neq 0$. Рассмотрим остатки первых l'_{k_0} членов прогрессии при делении на 10^{k_0}. Не менее, чем $\left[\frac{l'_{k_0}}{10}\right]$ из них попадут в промежуток $[c\cdot 10^{k_0-1}; (c+1)\cdot 10^{k_0-1})$, т. е. не менее $\left[\frac{l'_{k_0}}{10}\right]$ из первых l'_{k_0} членов прогрессии имеют в k_0-м справа разряде цифру c. Других (среди первых l'_{k_0}) членов прогрессии не более чем $l'_{k_0}-\left[\frac{l'_{k_0}}{10}\right]\leqslant 72$.

б) Пусть $c=0$. Если $a_1\geqslant 10^{k_0-1}$, то этот случай ничем не отличается от случая $c\neq 0$. Вообще же, поскольку запись натурального числа не принято начинать с нуля, нужно учесть, что некоторые члены прогрессии могут содержать менее k_0 цифр. Если $a_1<10^{k_0-1}$, то разность $a_{l'_{k_0}+1}-a_1=l'_{k_0}d=\frac{10^{k_0}\cdot d}{(d,10^{k_0})}$ кратна 10^{k_0} и в k-м справа разряде числа $a_{l'_{k_0}+1}$ стоит нуль. Поэтому без нулей могут записываться не более чем $l'_{k_0}\leqslant 80$ первых членов прогрессии.

Прогрессии из 72 (для $c=1, 2, ..., 9$) и из 80 (для $c=0$) различных натуральных чисел, не содержащих в своей записи цифры c, существуют. Например, прогрессии с разностью 125 и первыми членами, равными для $c=1, 2, ..., 9, 0$ соответственно 22075, 3055, 4025, 5000, 6111, 7075, 8055, 9025, 10000, 111.

Интересно, что такая же, но для частного случая $c=9$, задача была придумана В. Бугаенко и предложена на осеннем (1991 г.) Турнире городов.

Для $c=9$ имеется более простое решение, суть которого в следующем.

Задачник «Кванта»

Пусть члены прогрессии $a_1, a_2, ..., a_l$ не содержат в своей десятичной записи девяток, а разность d прогрессии такова, что $10^{n-1} \leqslant d < 10^n$ для некоторого натурального n. Тогда, как легко убедиться, в $(n+2)$-м справа разряде у всех членов прогрессии стоит одна и та же цифра или же не стоит никакой цифры. Последнее имеет место при $a_l < 10^{n+2}$ и именно этим случаем, не нарушая общности рассуждений, мы ограничимся.

Все члены прогрессии лежат в объединении 9 промежутков $[0;\ 88...8] \cup [10...0;\ 188...8] \cup ... \cup [80...0;\ 88...8]$ (правый конец первого промежутка содержит n цифр, концы всех остальных промежутков — по $(n+1)$ цифре). Допустим, что $l \geqslant 73$. Тогда, по принципу Дирихле, в каком-то из промежутков будет не менее 9 членов прогрессии. Но последнее возможно только при

$d \leqslant \frac{10^n-1}{9}$, что меньше разности между ближайшими

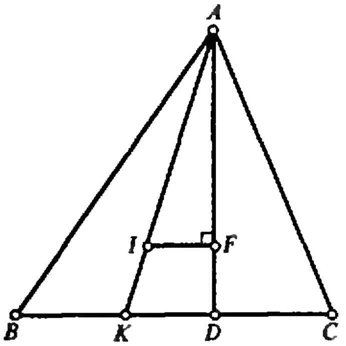
концами соседних промежутков. Получается противоречие с тем, что $a_1, a_2, ..., a_l$ — арифметическая прогрессия.

С. Токарев

***M1317.** Докажите для любого треугольника ABC неравенство*

$$\frac{1}{4} < \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} \leqslant \frac{8}{27},$$

где I — центр вписанной окружности, l_A, l_B, l_C — длины биссектрис треугольника ABC.



Пусть $AD = h_A$, а точка F на AD такая, что $IF \perp AD$ (см. рисунок). Из подобия треугольников AKD и AIF имеем: $\frac{IA}{l_A} = \frac{h_A - r}{h_A}$. Используя это равенство, легко доказать, что $\frac{IA}{l_A} = \frac{b+c}{a+b+c}$, $\frac{IB}{l_B} = \frac{a+c}{a+b+c}$, $\frac{IC}{l_C} = \frac{a+b}{a+b+c}$.

Из неравенства Коши следует, что

$$\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a+b+c} + \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \geqslant \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C}.$$

Докажем неравенство

$$\frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{(a+b+c)^3} > \frac{1}{4}.$$

Для того чтобы из отрезков, длины которых a, b, c, можно было составить треугольник, необходимо (а легко доказать, что и достаточно) выполнение неравенства

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим многочлен $P(x)$, корнями которого являются числа a, b, c: $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-px^2+qx-r$, где $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ac$, $r=abc$. Неравенство (1) дает:

$$-p^3+4pq-8r>0, \qquad (*)$$

а неравенство задачи приводится к виду: $-p^3+4pq-4r>0$ и немедленно следует из $(*)$.

Заметим, что оценка снизу числом $\frac{1}{4}$ является точной: достаточно рассмотреть треугольники со сторонами 1, 1, x при $x \to 0$.

Заметим также, что введение многочлена в этом решении не обязательно: оно лишь упрощает запись простых и естественных выкладок, в которых фигурируют только числа a, b, c.

З а м е ч а н и е. Пусть выполнено неравенство (1) и при этом не все скобки положительны. Тогда отрицательные числа стоят в двух из них, например, $a+b-c<0$, $a+c-b<0$. Сложив эти неравенства, получаем: $2a<0$. Противоречие.

В. Сендеров

M1318. Дан связный граф с n ребрами. Докажите, что его ребра можно пометить числами от 1 до n так, что для каждой вершины, из которой выходит не менее двух ребер, числа, стоящие на этих ребрах, не имеют общего делителя большего 1. (Граф — это система точек, некоторые пары которых соединены ребрами. Граф называется связным, если по его ребрам можно из любой вершины пройти в любую другую.)

Начав с некоторой вершины v_0, будем идти по различным ребрам графа, нумеруя их подряд 1, 2, ... s, до тех пор, пока это возможно.

Если в результате останутся непронумерованные ребра, то в силу связности графа хотя бы одно из них выходит из вершины, на которой мы уже побывали. Начав с этой вершины, мы пойдем по непронумерованным ребрам, нумеруя их подряд $s+1$, $s+2$, ... также до тех пор, пока это возможно.

Продолжая этот процесс, мы в конце концов получим некоторую нумерацию ребер графа. Докажем, что она — искомая. Действительно, пусть из некоторой вершины v выходит не менее двух ребер. Если $v=v_0$, то одно из ребер имеет номер 1, и поэтому, наибольший общий делитель номеров ребер, выходящих из v, равен 1.

Если $v \neq v_0$, то пусть наименьший номер среди номеров ребер, выходящих из вершины v, равен r. Это означает, что в первый раз мы попали в вершину v именно по этому ребру на r-м шаге нашего процесса. Так как в этот момент из вершины v выходили еще непронумерованные ребра, то одно из них должно иметь номер $r+1$. Наибольший общий делитель множества чисел, содержащего r и $r+1$, равен 1.

В. Вавилов, А. Фомин

M1319. Дан треугольник ABC и точка M внутри него. Докажите, что хотя бы один из углов MAB, MBC, MCA меньше или равен 30°.

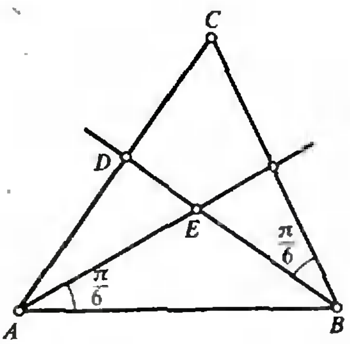


Рис. 1.

Пусть точка M внутри треугольника ABC такова, что все углы из условия задачи больше $\pi/6$. Тогда она лежит в треугольнике AED (см. рис. 1).

Следовательно, достаточно доказать, что $\angle ECA \leqslant \pi/6$.

Рассмотрим конфигурацию рисунка 2, где $r_1=1$, $\angle BO_2M=\pi/3$. Точка A лежит на прямой l в круге с центром O_2, точка M — в треугольнике ABC. Покажем, что при этих условиях отрезки BM и O_1O_2 имеют общую точку.

Пусть это не так (см. рис. 3).

На рисунке 3 прямая MD — касательная к окружности с центром O_1.

Имеем: $O_1C \perp l$, треугольник O_1CM правильный, отрезки BM и O_1C пересекаются. Так как угол BMm равен $\pi/6$, то прямая m, являющаяся касательной к окружности с центром O_2, пересекается с l в точке луча DC (либо $m \parallel l$). Следовательно, и точка A может лежать лишь на этом луче; значит, точка M лежит вне треугольника ABC.

Получили: $O_1O_2 \cap BM \neq \varnothing$.

Для решения задачи достаточно доказать, что $r_2 \leqslant d(O_2, l)$. (Здесь $d(O_2, l)$ — расстояние от точки O_2 до прямой l.) Пусть $d(O_2, l) \geqslant d(O_1, l)$. Имеем: $r_2=2\sin\alpha$,

$$d(O_2, l)=1+\left(\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sin\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+2\sin^2\alpha \geqslant 2\sin\alpha=r_2.$$

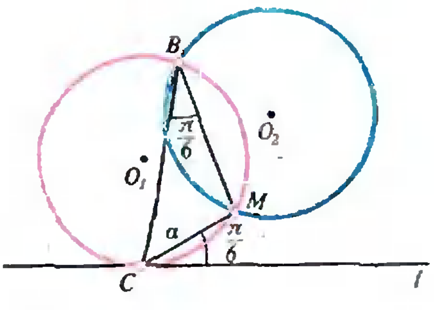


Рис. 2.

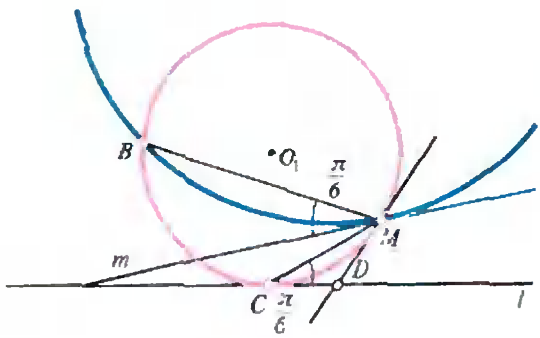


Рис. 3.

Случай $d(O_2, l)<d(O_1, l)$ рассматривается аналогично.

Замечание. Несложное доказательство допускает также и следующее утверждение. Пусть точка M лежит внутри четырехугольника $ABCD$. Тогда хотя бы один из углов MAB, MBC, MCD, MDA меньше или равен $\pi/4$. Докажите это утверждение самостоятельно.

В. Сендеров

Задачник „Кванта"

М1320. Для произвольного заданного числа $\alpha>1$ постройте бесконечную ограниченную последовательность $x_1, x_2, \ldots$ такую, что при любых m, n $(m\neq n)$ выполняется неравенство

$$|x_m-x_n|\,|m-n|^{\alpha}\geq 1.$$

Применим двоичную запись натуральных чисел. Пусть

$$i=b_0+b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+\ldots+b_k\cdot 2^k,$$

где все $b_s\in\{0;\ 1\}$ и $k\in N$. Пусть

$$h_i=b_0+b_1\cdot 2^{-\alpha}+b_2\cdot 2^{-2\alpha}+\ldots+b_k\cdot 2^{-k\alpha}.$$

Тогда

$$0\leq h_i\leq 1+2^{-\alpha}+\ldots+2^{-k\alpha}\leq\frac{1}{1-2^{-\alpha}}.$$

Возьмем $j\in N$, $j\neq i$, $j=c_0+c_1\cdot 2+\ldots+c_k\cdot 2^k$, $c_s\in\{0;\ 1\}$. Обозначим через l наименьший номер, для которого $b_l\neq c_l$. Тогда

$$|h_i-h_j|=|(b_0-c_0)+(b_1-c_1)2^{-\alpha}+\ldots+(b_k-c_k)2^{-k\alpha}|\geq$$
$$\geq|(b_l-c_l)2^{-l\alpha}|-|(b_{l+1}-c_{l+1})2^{-(l+1)\alpha}|-\ldots$$
$$\ldots-|(b_k-c_k)2^{-k\alpha}|\geq 2^{-l\alpha}-\frac{2^{-(l+1)\alpha}}{1-2^{-\alpha}}=$$
$$=2^{-l\alpha}\left(1-\frac{2^{-\alpha}}{1-2^{-\alpha}}\right)=(2^l)^{-\alpha}\left(\frac{2^{\alpha}-2}{2^{\alpha}-1}\right)\geq$$
$$\geq\left(\frac{2^{\alpha}-2}{2^{\alpha}-1}\right)|i-j|^{-\alpha},$$

поскольку $2^l\leq|i-j|$. Таким образом,

$$|h_i-h_j|\cdot|i-j|^{\alpha}\geq\frac{2^{\alpha}-2}{2^{\alpha}-1}.$$

Для завершения конструкции искомой последовательности теперь достаточно положить

$$x_i=\frac{2^{\alpha}-1}{2^{\alpha}-2}h_i.$$

Замечание. Последовательность $x_n=\{n\sqrt{2}\}$ ($\{x\}$ — дробная часть числа x) удовлетворяет условию задачи при $\alpha=1$ и, следовательно, при всех $\alpha>1$. Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно. (См. также в книге Н. Васильева и А. Егорова «Задачи всесоюзных математических олимпиад», М., «Наука», 1988, с. 227)

В. Вавилов, А. Фомин

Ф1333. Ведро с водой свисает с ворота колодца, тяжелая ручка ворота находится в нижнем положении (рис. 1). Если ведро отпустить, оно начнет двигаться и достигнет дна колодца. Подберем количество воды таким, чтобы при его уменьшении ведро при

Введем обозначения: масса ведра с нужным количеством воды M, радиус ворота R, масса ручки ворота, представляющей собой груз на конце рычага, m, длина рычага l. Обозначим через α угол рычага с вертикалью, при котором система находится в равновесии, и запишем условие равновесия:

$$MgR=mgl\sin\alpha. \qquad (1)$$

Положений равновесия два — при верхнем и нижнем расположениях ручки ворота (рис. 2). Условие задачи —

движении не достигало дна. При каком положении ручки ворота система в этом случае может находиться в равновесии? Веревку считайте легкой. Трением можно пренебречь.

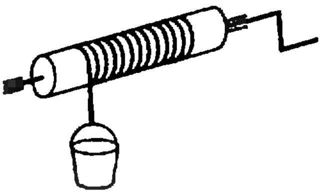


Рис. 1.

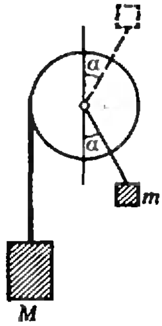


Рис. 2.

Задачник «Кванта»

масса воды минимальна, а ведро еще достигает дна — можно выполнить в случае, если ручка «доедет» до верхнего положения равновесия, имея при этом почти нулевую скорость (в пределе — точно нулевую).

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии. Ведро опустилось из начального положения на

$$\Delta h_1 = R(\pi - \alpha) \text{ (}\alpha\text{ — в радианах).}$$

Ручка ворота поднялась из нижнего положения на

$$\Delta h_2 = l + l\cos\alpha = l(1+\cos\alpha).$$

Начальная и конечная кинетические энергии системы равны нулю. Тогда, в соответствии с законом сохранения энергии, можно записать

$$Mg\Delta h_1 = mg\Delta h_2, \text{ или } MR(\pi-\alpha) = ml(1-\cos\alpha). \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) получаем

$$\pi - \alpha = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \text{ или } \alpha + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pi.$$

Это уравнение легко решить численными методами или даже простым подбором по таблице.

Окончательный ответ: $\alpha \approx 0{,}81$ рад $\approx 46°$.

Б. Корсунский

***Ф1334.** Тонкая квадратная пластинка АБВГ сделана из меди. Ее нагревают со стороны торца АБ, поддерживая его температуру равной 100 °С, и охлаждают со стороны трех остальных торцов, поддерживая их температуру равной 0 °С. Найдите температуру в центре пластинки.*

Сразу нужно сказать, что полностью решить эту задачу — найти распределение температур по пластинке — очень трудно (а в рамках школьной программы — просто невозможно). Однако нам нужно найти температуру только в одной точке, и расположена эта точка очень удачно — в центре пластинки, так что дело небезнадежно.

Сформулируем вспомогательное утверждение (которое вполне очевидно): если при заданных температурах торцов в пластинке установилось равновесное распределение температур и мы увеличим температуры всех торцов на величину Δt, то все равновесные температуры увеличатся тоже на Δt.

Еще одно утверждение (куда менее очевидное — над ним придется подумать): если мы увеличим температуры торцов на разные величины Δt_1, Δt_2, Δt_3, Δt_4, то увеличение температуры в данной точке, из-за дополнительно возникших тепловых потоков, будет таким, какой была бы равновесная температура в этой точке, если бы температуры торцов были Δt_1, Δt_2, Δt_3, Δt_4.

Это нужно обсудить. Во-первых, не вполне ясно, чего же мы достигли — ведь вспомогательная задача ничуть не проще первоначальной (заданы температуры торцов и нужно найти температуру в центре). На самом деле эта задача все же проще — мы сами выберем Δt_1, ..., Δt_4 так, чтобы ответ было легко угадать. Во-вторых, не странно ли складывать температуры в точке («... температуры двух физиков равны по 36,6 °С, поставим физиков рядом и найдем получившуюся температуру: $t_{общ}=36,6\ °C+$ $+36,6\ °C=73,2\ °C$...»)? Конечно, пример в скобках абсурден, но мы собираемся складывать вовсе не температуры, а тепловые потоки. Результирующую же температуру мы найдем, учтя температурные добавки, вызванные дополнительными потоками.

Итак, будем решать. На рисунках 1—4 приведены простые примеры, в которых легко угадать (в последнем — чуть сложнее) температуры в центре пластинки. Они равны соответственно —50 °С, +25 °С, +25 °С, +25 °С.

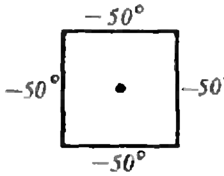


Рис. 1.

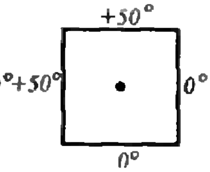


Рис. 2.

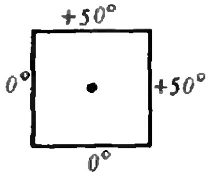


Рис. 3.

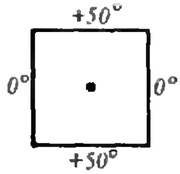


Рис. 4.

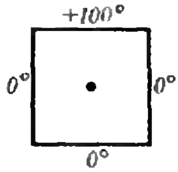


Рис. 5.

А теперь, начав с ситуации, изображенной на рисунке 1, будем увеличивать температуры торцов, «накладывая» ситуации 2, 3 и 4. После всего мы получим искомое распределение температур (рис. 5), а температура в центре пластинки будет равна +25 °С. Это и есть ответ.

А. Шапиро, А. Зильберман

***Ф1335.** Внутри длинной трубы, наполненной воздухом, двигают с постоянной скоростью поршень, при этом в трубе распространяется со скоростью 320 м/с упругая волна. Считая перепад давлений на границе распространения волны равным 1000 Па, оцените перепад температур. Давление в невозмущенном воздухе 1 атм, температура 300 К.*

Пусть волна в трубе движется с постоянной скоростью v. Свяжем эту величину с заданным в условии перепадом давлений Δp и с разностью плотностей $\Delta\rho$ в невозмущенном воздухе и в волне. Разность давлений Δp «разгоняет» до скорости v «избыток» воздуха плотностью $\Delta\rho$, поэтому, в соответствии со вторым законом Ньютона, можно записать

$$(\Delta pS)\Delta t=(\Delta\rho Sv\Delta t)v,$$

где S — площадь сечения трубы, Δt — малый промежуток времени. Отсюда получаем

$$v=\sqrt{\Delta p/\Delta\rho}$$

(эта формула широко известна, ее вывод в более строгих предположениях можно найти в любом курсе общей физики для вузов).

Воспользуемся уравнением Менделеева — Клапейрона и выразим $\Delta\rho$ через Δp:

$$\Delta\rho=\frac{(p+\Delta p)M}{R(T+\Delta T)}-\frac{pM}{RT}=\frac{MT\Delta p-p\Delta T}{R(T+\Delta T)T},$$

где $M=29$ г/моль — молярная масса воздуха, $R=$ $=8,31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная.

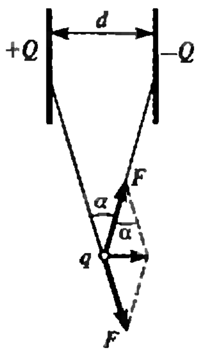
Подставляя сюда $\Delta\rho=\Delta p/v^2$ и учитывая, что $\Delta T/T \ll 1$, находим

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{\Delta p}{p}\left(1-\frac{RT}{Mv^2}\right)\approx 0{,}16\,\frac{\Delta p}{p}=1{,}6\cdot 10^{-3}.$$

Итак, $\Delta T\approx 0{,}5$ К.

Р. Александров

***Ф1336.** Плоский конденсатор, состоящий из двух круглых пластин площадью S, находящихся на малом расстоянии d друг от друга, заряжают до разности потенциалов U. На одинаковом расстоянии L от обеих пластин помещают маленький шарик, масса которого m и заряд q. Шарик отпускают. Найдите его ускорение в первый момент после отпускания и предельную скорость, которую он наберет за большое время. Считайте расстояние L во много раз бо́льшим, чем размеры конденсатора. Силу тяжести не учитывайте.*



Пусть пластины конденсатора заряжены зарядами $+Q$ и $-Q$ (см. рисунок). Тогда

$$Q=CU=\varepsilon_0 SU/d$$

— заряженный шарик находится далеко и его влиянием на распределение зарядов по пластинам мы пренебрегли. Учитывая, что $L\gg\sqrt{S}$ и $L\gg d$, найдем силу, действующую на шарик со стороны конденсатора:

$$F_{\text{полн}}=2F\sin\frac{\alpha}{2}\approx F\alpha\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{L^2}\frac{d}{L}=$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{L^3}\frac{\varepsilon_0 SU}{d}=\frac{1}{4\pi}\frac{qSU}{L^3}.$$

Тогда начальное ускорение шарика равно

$$a=\frac{F_{\text{полн}}}{m}=\frac{qSU}{4\pi mL^3}.$$

В точке, где шарик находился вначале — на одинаковом расстоянии от пластин, заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами, потенциал поля, создаваемого этими зарядами, равен нулю. На большом расстоянии от конденсатора (шарик через большое время улетит далеко) потенциал поля также равен нулю. Значит, и конечная скорость шарика будет нулевой — вначале он будет разгоняться, а потом тормозиться.

З. Рафаилов

***Ф1337.** При исследовании на переменном токе «черного ящика» была использована схема, показанная на рисунке 1. Напряжение звукового генератора на всех частотах было равно 1 В, показания милливольтметра на разных частотах приведены в таблице.*

График зависимости тока от частоты имеет явный минимум на частоте $\approx$450 Гц. Такой характерной особенностью обладает, например, параллельный колебательный контур (рис. 2). В принципе есть множество схем с похожими свойствами, мы выбрали простейшую. Найдем параметры элементов r, C, L контура и если получатся разумные числа, то будем считать задачу решенной.

На самых высоких частотах ($f\approx$2000 Гц) полное сопротивление контура $Z_{\text{общ}}$ практически определяет кон-

Что может находиться внутри «черного ящика»? Рассчитайте параметры элементов предложенной вами схемы (постарайтесь обойтись без экзотических приборов, все равно никто их вам не доверит — еще испортите!).

f, кГц	U, мВ
0,2	540
0,4	90
0,6	195
0,8	380
1,0	520
1,2	620
1,4	690
1,6	750
1,8	790
2,0	820

денсатор (индуктивное сопротивление равно емкостному на резонансной частоте ($f_р \approx 450$ Гц), а выбранная нами высокая частота примерно в 4—5 раз выше, значит, поправка не больше 20—25 %). Таким образом, для нашей схемы (см. рис. 1) можно записать

$$U_0 = IZ_{общ} \approx I\sqrt{X_C^2+R^2} = \frac{U}{R}\sqrt{X_C^2+R^2}.$$

Отсюда получаем

$$X_C = R\sqrt{U_0^2/U^2-1} \approx 700 \text{ Ом},$$

что соответствует емкости конденсатора

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} \approx 1{,}1\cdot 10^{-7}\text{Ф} = 0{,}11 \text{ мкФ}.$$

Уточним немного эту оценку. На самом деле емкостное сопротивление несколько меньше 700 Ом (т. е. емкость несколько больше), а увеличение полного сопротивления «ящика» до 700 Ом обеспечивает цепь с катушкой (влияние активного сопротивления r в нашем случае незначительно — из величины тока на частоте 400 Гц можно сделать вывод, что $r > 10$ кОм). После введения поправки (20—25 %) емкость оценим так:

$$C \approx 0{,}13\text{—}0{,}14 \text{ мкФ}.$$

Индуктивность катушки в нашем случае можно оценить только по значению резонансной частоты и найденной оценке для емкости:

$$L \approx \frac{1}{4\pi f_р^2 C} \approx 0{,}9 \text{ Гн}.$$

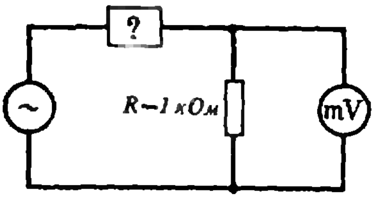


Рис. 1.

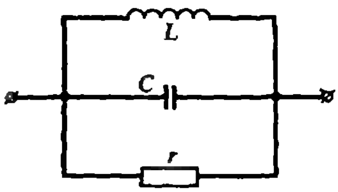


Рис. 2.

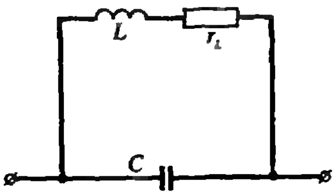


Рис. 3.

Числа для C и L получились вполне разумные, теперь можно привести и более правдоподобную схему — она изображена на рисунке 3. Дело в том, что катушки такой индуктивности даже с ферромагнитным сердечником имеют достаточно большое сопротивление r_L постоянному току и нет необходимости придумывать специальный резистор сопротивлением r. Оценить (очень грубо!) величину r_L можно по значению тока на самой низкой из используемых частот (200 Гц) — получается примерно 200—400 Ом.

Цифры, приведенные в условии задачи, явно округлены, поэтому пытаться получить более точные оценки не имеет смысла. На практике же нужно было бы не проводить измерения на нескольких фиксированных частотах, а исследовать резонансную точку намного подробнее.

А. Ящиков

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. На балу каждый кавалер танцевал с тремя дамами, а каждая дама — с тремя кавалерами. Докажите, что число кавалеров было равно числу дам.

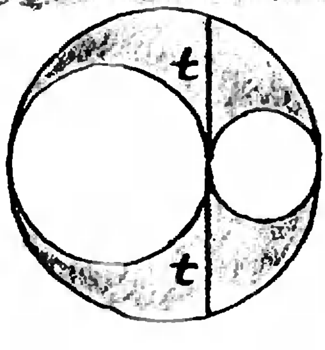
2. Шахматный конь обошел всю доску 6×6 и вернулся на исходное поле, побывав на каждом из остальных полей по одному разу. На рисунке указаны номера ходов при посещении некоторых полей доски. Восстановите полностью путь коня.

17				11	
2			25		
23	16	1			
30			19		
15				13	
8					35

3. Если обозначить одинаковыми буквами одинаковые цифры, а разными — разные, то во второй половине bd века нашей эры был $abcd$ год. Какой это был год?

4. Андрей и Витя купили одинаковые тетрадки, каждая из которых стоила дороже 30 копеек, но дешевле рубля. Андрей платил двадцатикопеечными монетами и получил 3 копейки сдачи, а Витя — пятнадцатикопеечными и одной двухкопеечной монетой. Сколько стоит тетрадь?

5. Длина хорды, касающейся вписанных окружностей, изображенных на рисунке, равна $2t$. Найдите площадь заштрихованной части круга.



Эти задачи нам предложили В. Произволов, А. Савин, И. Акулич, Н. Антонович. Последняя задача взята из книги Д. Пойа «Математическое открытие».

РЕШЕНИЕ РЕБУСОВ НА ЧАШЕЧНЫХ ВЕСАХ

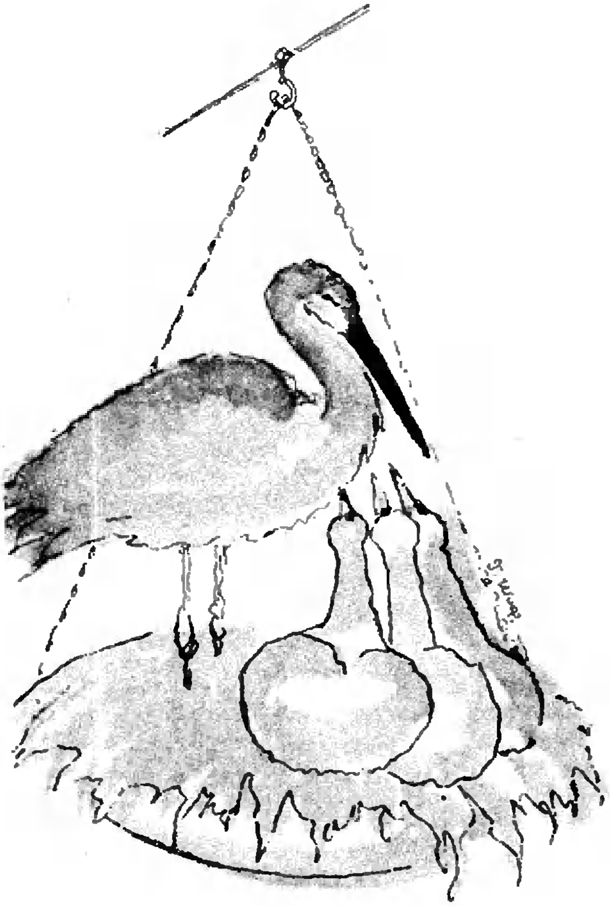
И. АКУЛИЧ

Как редкая птица долетит до середины Днепра, так и редкий номер «Кванта» обходится без арифметических ребусов. Чаще всего это задачи на сложение. Например:

$$\mathrm{EINS}+\mathrm{EINS}+\mathrm{EINS}+\mathrm{EINS}+\mathrm{EINS}=\mathrm{FUNF}$$

(«Квант» № 5, 1990 г.).

Как и во всех ребусах, публикуемых в «Кванте», в этой задаче одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные, ни одно из чисел не начинается нулем и расшифровать ребус можно единственным образом.



Многие из вас наверняка неоднократно решали такие ребусы; какие-то из них даются легче, какие-то — труднее, и нередко приходится хорошенько поломать голову, чтобы, используя какое-либо малоприметное свойство, суметь распутать задачу и получить искомый ответ. Без перебора, как правило, тоже не обходится, и количество рассматриваемых вариантов часто зависит от изобретательности и сообразительности решающего. Короче говоря — ребус ребусу рознь, и каждый требует индивидуального подхода.

После такого аргументированного и вроде бы неоспоримого вступления позвольте заметить следующее. Оказывается, имея обыкновенный микрокалькулятор, можно большинство этих ребусов решить за несколько минут одним и тем же почти механическим способом, не требующим ни особой сообразительности, ни тем более изобретательности. Не верите? Сейчас убедитесь.

«Взвесим» ребус

Суть метода покажем на примерах, взятых из номеров «Кванта» за последние три года.

Пример 1 («Квант» № 4, 1989 г.).

$$\mathrm{АИСТ}+\mathrm{АИСТ}+\mathrm{АИСТ}+\mathrm{АИСТ}=\mathrm{СТАЯ}.$$

Очевидно, $\mathrm{АИСТ}=1000\mathrm{А}+100\mathrm{И}+10\mathrm{С}+\mathrm{Т}$, а $\mathrm{СТАЯ}=1000\mathrm{С}+100\mathrm{Т}+10\mathrm{А}+\mathrm{Я}$. Тогда ребус можно записать в виде:

$$4(1000\mathrm{А}+100\mathrm{И}+10\mathrm{С}+\mathrm{Т})=1000\mathrm{С}+100\mathrm{Т}+10\mathrm{А}+\mathrm{Я}.$$

Осталось решить это уравнение в неотрицательных целых и (самое главное!) различных числах, причем А и С не равны 0.

Перенесем все неизвестные в левую часть и запишем их в порядке убывания абсолютных величин коэффициентов:

$$3990А-960С+400И-96Т-Я=0.$$

Первое слагаемое равно 3990А. Подберем такое А, чтобы оно как можно меньше отличалось от нуля. Так как $А\neq0$, то приходится брать $А=1$, и $3990А=3990$.

Тогда сумма первых двух слагаемых равна $3990-960С$. Так как следующее — третье — слагаемое (400И) имеет знак «плюс», то подберем такое С, чтобы сумма двух первых слагаемых была как можно ближе к нулю, но оставалась не больше нуля. Это будет при $С=5$; тогда $3990А-960С=-810$.

Рассмотрим сумму первых трех слагаемых, равную $-810+400И$. Так как четвертое слагаемое имеет знак «минус», то подберем такое И, чтобы сумма была возможно ближе к нулю, но *не меньше* нуля. Получаем $И=3$, и сумма первых трех слагаемых равна $+390$.

Перейдем к сумме первых четырех слагаемых, равной $390-96Т$. Так как пятое слагаемое имеет знак «минус», то надо подобрать такое Т, чтобы сумма оставалась *не меньше* нуля, находясь возможно ближе к нулю. Это будет при $Т=4$, и сумма равна $+6$.

Дальнейшее ясно: последняя сумма равна $6-Я$ и должна равняться нулю, т. е. $Я=6$.

Ответ готов: АИСТ=1354, СТАЯ=5416.

Надеюсь, суть метода ясна? Разумеется, на каждом шагу следует выбирать значение очередной буквы из ранее не использованных цифр. А вообще-то, рассмотренный метод очень напоминает такую практическую задачу. Имеются чашечные весы и набор разнокалиберных гирь, которые надо побыстрее уравновесить. Наиболее естественный способ таков: самую тяжелую гирю ставим на одну чашку, пару штук полегче — на другую и т. д., т. е. загрузку весов начинаем с самых больших гирь. То же самое мы сделали, решая данный ребус, поэтому можем смело утверждать, что решили его *на чашечных весах*. При этом приведенные рассуждения удобно оформить в виде таблицы (см. таблицу 1 на с. 38).

Шевеление

К сожалению, описанным способом не всегда удается вот так, «с ходу», получить ответ. Поэтому сейчас мы ознакомимся со второй частью метода, самое подходящее название для которой — *шевеление*.

Пример 2 («Квант» № 9, 1990 г.).

$$ЗАЗОР+АЗОР+ЗОР+ОР+Р=55550.$$

Пусть вас не пугает наличие кроме букв также и конкретного числа. Надо лишь, преобразовывая уравнение к эквивалентному виду, записать это число в самом начале:

$$55550-10300\cdot З-2000\cdot А-40\cdot О-5\cdot Р=0.$$

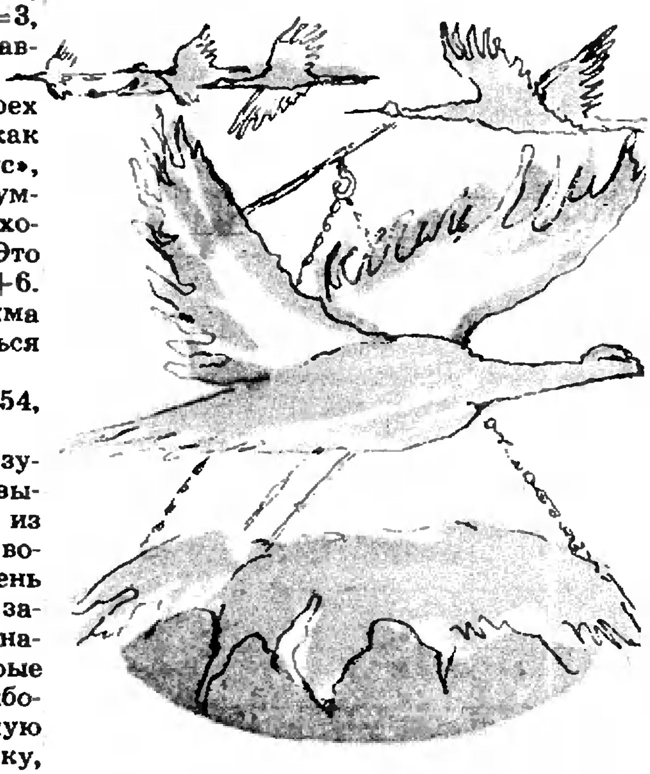


Таблица 1.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	Значение буквы	Значение суммы
1	3990А	не используется	А=1	+3990
2	3990—960С	+	С=5	—810
3	—810+400И	—	И=3	+390
4	390—96Т	—	Т=4	+6
5	6—Я	нет	Я=6	0

Таблица 2.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	Значение буквы	Значение суммы
1	11 110—2060 · З	—	З=5	+810
2	810—400 · А	—	А=2	+10
3	10—8 · О	—	О=1	+2
4	2—Р	нет	Р=3	—1

Таблица 3.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	Значение буквы	Значение суммы
1	11 110—2060 · З	—	З=4	+2870
2	2870—400 · А	—	А=7	+70
3	70—8 · О	—	О=8	+6
4	6—Р	нет	Р=6	0

Таблица 4.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	НОД последующих коэффициентов	Значение буквы	Значение суммы
1	500 · E	не используется	1	E=1	+5000
2	5000—1001 · F	+	5	F=5	—5
3	—5+500 · I	—	5	I=2	+995
4	995—100 · U	+	5	U=9	+95
5	95+40 · N	+	5	N=0	+95
6	95+5 · S	нет	нет	S=3	+110

Предварительно поделим данное уравнение на 5:

$$11110-2060\cdot З-400\cdot А-8\cdot О-Р=0.$$

А теперь составим для него такую же таблицу (таблица 2), причем постоянному члену не присваиваем отдельного номера слагаемого.

Как видно, не удалось добиться нулевой суммы. Вот если бы взять Р=2, но это значение уже занято буквой А! Что же делать?

Применим шевеление, т. е. будем понемногу менять значения букв, стоящих перед Р, в порядке возрастания коэффициентов. Если, не меняя З и А, пошевелить О, то, как видно, итоговая сумма станет либо отрицательной, либо двузначной, и никакое допустимое значение Р ее не скомпенсирует. Если пошевелить А, не меняя З, то при изменении А на 1 сумма изменяется аж на 400. Тут уж никакие значения О и Р с их жалкими коэффициентами не смогут ее занулить. Выход один: надо шевелить З. Очевидно, брать З>5 нельзя: сумма станет отрицательной и стать положительной уже не сможет. Возьмем ближайшее к 5 меньшее число, т. е. З=4, и снова составим таблицу по тем же правилам (см. таблицу 3).

Порядок! Задача решена: ЗАЗОР=47486.

Наибольший общий делитель

Укажем еще одну уловку, позволяющую заранее отсечь некоторые бесперспективные значения букв. Назовем ее так: НОД (что, понятное дело, означает наибольший общий делитель).

Решим теперь ребус, приведенный в начале статьи.

Пример 3.

$$EINS\times 5=FUNF.$$

Его эквивалентный вид

$$5000\cdot E+1001\cdot F+500\cdot I-100\cdot I+40\cdot N+5\cdot S=0.$$

Уловка «НОД» применяется, только если наименьший из коэффициентов (в данном случае — при S) не равен 1. Тогда, очевидно, сумма, получаемая при «подходе» к последнему слагаемому, должна делиться на этот коэффициент. Кроме того, сумма, получившаяся при «подходе» к предпоследнему слагаемому, должна делиться на НОД коэффициентов при двух последних слагаемых и так далее. Иначе говоря, при подборе значений букв надо следить, чтобы получаемая сумма делилась на НОД коэффициентов при последующих слагаемых. Это позволяет отбросить заведомо бесперспективные значения, но приводит к необходимости ввести дополнительную графу в нашу таблицу (таблица 4).

Краткие пояснения: здесь, как видно, лишь при двух значениях F сумма делится на 5: это F=0 и F=5. Но F стоит на первом месте в числе FUNF и, следовательно, не может быть равным нулю. После слагаемого (—100 · U) все члены положительны, поэтому сумму надо было непременно сделать отрицательной, но даже наибольшее возможное значение U=9 не позволило ее скомпенсировать. Результат налицо: решение не найдено.

Приступим к шевелению. Очевидно, шевелить надо переменные, стоящие перед U, т. е. начинать надо с I. Если взять I>2, то неувязка еще больше усугубится. Значение I=1 занято. Попробуем I=0. Переделаем таблицу, причем даже не всю, а лишь строки, начиная с третьей (см. таблицу 5 на с. 42).

Готово: EINS=1049, FUNF=5245.

Что же, после такой радужной картины самое время, видимо, добавить ложку дегтя. Не всегда (и, пожалуй, далеко не всегда) после первого же шевеления мы придем к ответу. Иной раз придется изрядно повозиться. И вот тому подтверждение.

Пример 4 («Квант» № 12, 1989 г.).

$$КНИГА+КНИГА+КНИГА=НАУКА.$$

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Сжатые давлением окружающего воздуха, они [чаши] соединялись так прочно, что шестнадцать лошадей либо совсем не могли их разорвать, либо могли это сделать с большим усилием.

Отто Герике

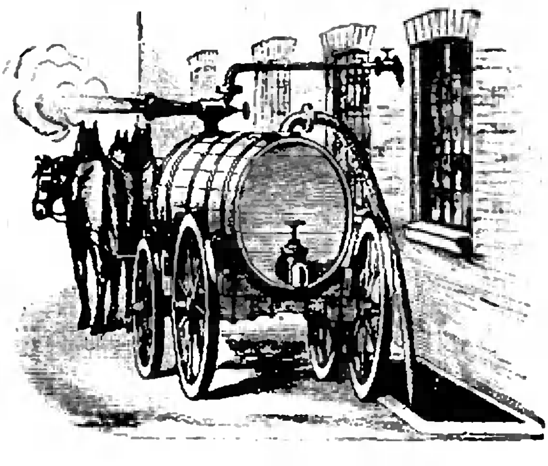
А так ли хорошо знакомо вам

давление ?

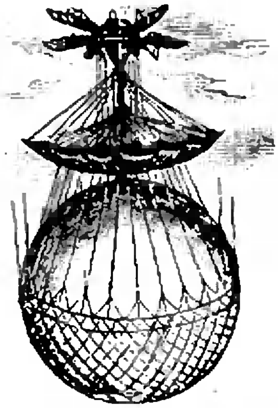
Конечно, вы сразу догадались, что в эпиграфе речь идет о роли давления в знаменитых опытах с магдебургскими полушариями. Давление — одна из первых величин, с которой мы знакомимся в курсе физики, к которой быстро привыкаем и позже относим ее как бы ко второму ряду — за такими фундаментальными понятиями, как время, длина, масса. Однако история науки напоминает нам, какую огромную роль сыграло в свое время открытие атмосферного давления. А соответствующие эксперименты Торричелли, Герике, Паскаля вошли в золотой фонд науки, стимулируя новые исследования и формируя основы современного естествознания.

Но было бы неверно утверждать, что сегодня понятие «давление» представляет лишь исторический интерес. Мы настолько часто сталкиваемся с давлением, оно столь многолико, что «пропитало» самые разные области физики и способствовало рождению многих остроумных и непростых вопросов.

Не верите — убедитесь сами.



Вопросы и задачи

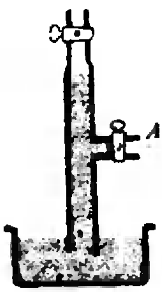


1. Надувной матрац заполнен воздухом до давления, превышающего атмосферное. В каком случае давление воздуха в матраце будет больше: когда человек станет на него или когда ляжет?

2. На доске лежит кирпич. Один конец доски плавно поднимают. Изменяется ли при этом давление кирпича на доску?

3. Какую форму должен иметь паровой котел, чтобы при заданной толщине стенок прочность котла была наибольшей?

4. В полый куб доверху налита жидкость. Как отличаются друг от друга силы давления на различные грани куба?



5. Из трубки, опущенной одним концом в воду, откачали воздух. При этом вода поднялась в трубке так, как показано на рисунке. Будет ли вытекать вода из крана A, если его открыть?

6. Закрытый сосуд доверху заполнен водой. У дна сосуда находится пузырек воздуха. Как изменится давление на дно сосуда, когда пузырек всплывет?

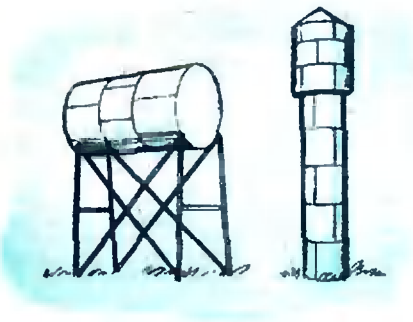
7. В море на большой глубине затонула незакупоренная бутылка. Увеличится или уменьшится вместимость бутылки под давлением воды?

8. Ртутный барометр, сохраняя вертикальное положение, падает с большой высоты. Что он показывает при этом?

9. К динамометру подвешена тонкостенная трубка ртутного барометра. Что показывает динамометр? Будут ли меняться его показания при изменении атмосферного давления?

10. Как-то одному моряку не удалось закрыть доской небольшое отверстие, через которое врывалась струя воды в трюм корабля. Приятель помог ему прижать доску к отверстию, после чего первому не стоило большого труда одному удерживать доску. Почему?

11. Какую роль при питье играет атмосферное давление?



12. Одинаковое ли давление создают в водной магистрали изображенные на рисунке водонапорные башни? Почему обычно строят более дорогие и громоздкие башни, как на рисунке слева?

13. Как меняется сила светового давления Солнца на какую-либо поверхность с увеличением расстояния от Солнца?

14. Отчего легкий шарик, помещенный в струю воздуха или воды, вытекающую с большой скоростью из трубки с узким отверстием, свободно парит в этой струе?

15. По трубе с переменным сечением течет вода. В трубу поместили эластичный резиновый мячик. Как изменится его диаметр при прохождении узкой части трубы?

Микроопыт

Попробуйте найти способ вылить воду из бутылки, не наклоняя ее.

Любопытно, что...

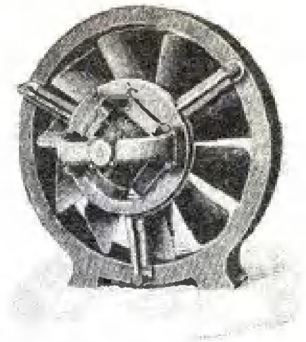
... Галилей, первым сделавший оценку плотности воздуха, до конца своих дней, как ни странно, сомневался в существовании атмосферного давления.

... Герике рассматривал свои пневматические опыты не просто как занятные наблюдения, а в рамках общих и весьма смелых для XVII века представлений о системе мира. Убежденный сторонник учения Коперника, Герике стремился обосновать гипотезу о множестве обитаемых миров и считая, что свойства пустого пространства независимы от божественного промысла.

... Паскаль, узнав об опытах Торричелли, решил их повторить, используя, правда, вместо ртути воду и... вино.

... Гидростатический парадокс — независимость давления жидкости на дно сосуда от его формы — был сформулирован голландским инженером и математиком Стевином задолго до «открытия» этого парадокса Паскалем. Паскаль не знал мало распространенный голландский язык и Стевина не читал.

... многие явления в мире живой природы объясняются действием сил давления и служат прообразом различных «изобретений». Например, присоски у рыб-прилипал или «устройство» копыт жвачных животных, позволяющее им не проваливаться в болоте.



... в природе можно наблюдать весь спектр давлений — от предельно малых (вакуум) до сверхбольших (внутри звезд). В лабораторных условиях удается воспроизвести как крайне низкие давления порядка 10^{-10}—10^{-12} атм, получаемые с помощью вакуумных насосов, так и давления свыше 10^5 атм, используемые, скажем, для получения искусственных алмазов.

... световое давление, наряду с давлением газов, ограничивает предельный размер звезд, существующих во Вселенной. Астрономические наблюдения подтвердили, что самые «тяжелые» звезды обладают как раз той предельной массой, которую еще допускает теория, учитывающая равновесие сил гравитационного сжатия и светового и газового давлений внутри звезд.

Что читать в «Кванте» о давлении
(публикации последних лет)

1. «Давление газа в сосуде» — 1987, № 9, с. 41;
2. «Давление света» — 1988, № 6, с. 19;
3. «О давлении» — 1989, № 3, с. 44;
4. «Еще раз о законе Паскаля» — 1990, № 2, с. 52;
5. «В роли магдебургского бургомистра» — 1990, № 5, с. 38;
6. «Вслед за Бойлем и Ломоносовым...» — 1991, № 4, с. 48.

Материал подготовил А. Леонович

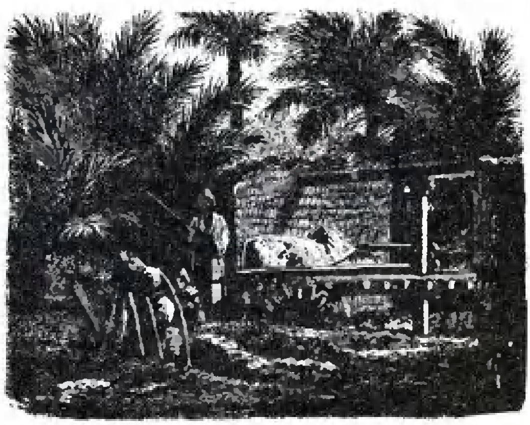


Таблица 5.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	Нод последующих коэффициентов	Значение буквы	Значение суммы
3	−5+500· I	—	5	I=0	−5
4	−5−100· U	+	5	U=2	−205
5	−205+40· N	+	5	N=4	−45
6	−45+5· S	нет	нет	S=9	0

Таблица 6.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	НОД последующих коэффициентов	Значение буквы	Значение суммы
1	29990К	не используется	2	К=1	+29 990
2	29 990−7000Н	—	2	Н=4	+1990
3	1990−998А	+	10	А=5	−3000
4	−3000+300И	—	10	И=9	−300
5	−300−100У	+	30	У=0	−300
6	−300+30Г	нет	нет	Г=8	−60

Эквивалентный вид:

$$29990К-7000Н-998А+$$
$$+300И-100У+30Г=0.$$

Последний коэффициент не равен 1, и здесь тоже придется использовать столбец с НОД (таблица 6).

Ответ не получен, причем, как видно, основной «сбой» произошел после того, как было выбрано А=5 (получившаяся в результате сумма оказалась некомпенсируемой). Надо бы попробовать другое А, которое с учетом НОД должно быть кратно 5. Однако здесь мы угодим в другую крайность: получится некомпенсируемая положительная сумма. Значит, надо шевелить что-то «повыше», например — Н, и начинать со значений 3 и 5, соседних с Н=4. Но тут же выяснится, что опять возникает некомпенсируемая сумма, причем гораздо большая, чем при Н=4 (убедитесь!). Ясно, что другие значения Н нет смысла и пробовать. Придется шевелить самое начало — К. Сначала, разумеется, возьмем К=2 (см. таблицу 7).

Здесь пришлось взять У=7, чтобы сумма была отрицательна и притом делилась на 30. В итоге скомпенсировать ее не удалось, даже взяв наибольшее возможное значение Г=9. Пошевелим букву И, стоящую перед У. Сначала надо попробовать соседние значения, т. е. И=3 и И=5. Но последнее значение уже занято буквой А. Поэтому пробуем И=3 (таблица 8).

Наконец-то получен результат: КНИГА=28375, НАУКА=85125. Действительно, пришлось повозиться. Хотя, честно говоря, не очень-то мно-

Таблица 7.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	НОД последующих коэффициентов	Значение буквы	Значение суммы
1	29 990К	не используется	2	К=2	+59 980
2	59 980—7000Н	—	2	Н=8	+3980
3	3980—998А	+	10	А=5	—1010
4	—1010+300И	—	10	И=4	+190
5	190—100У	+	30	У=7	—510
6	—510+30Г	нет	нет	Г=9	—240

Таблица 8.

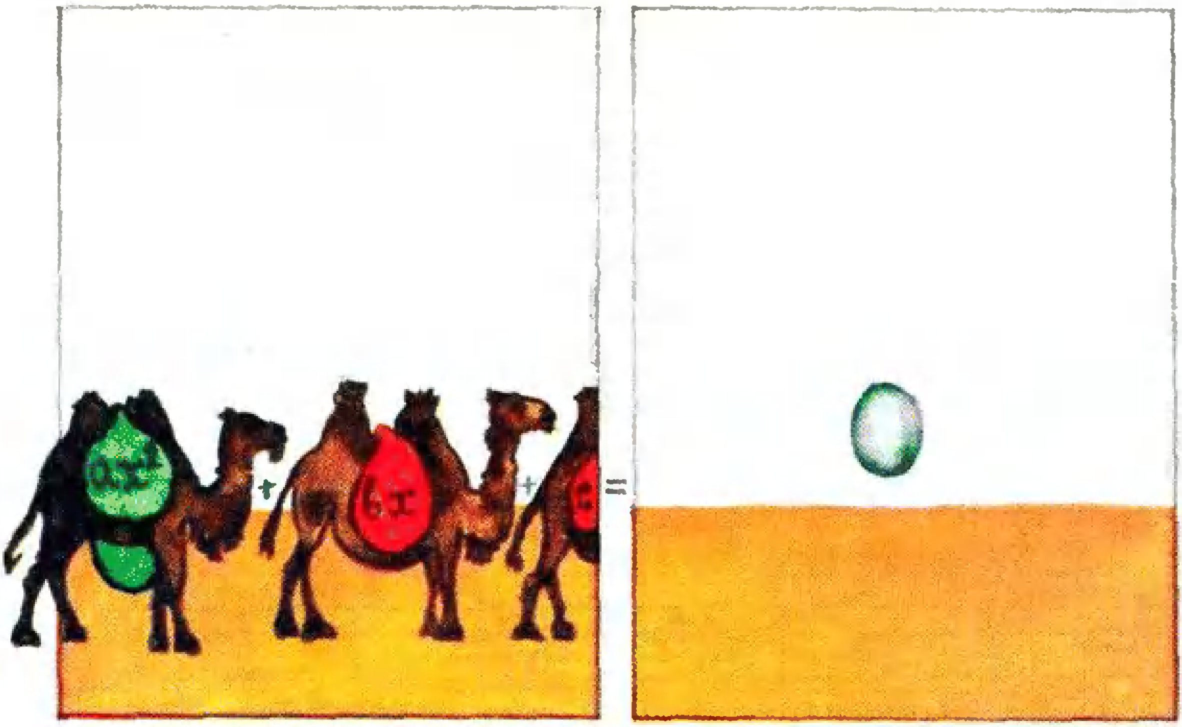
Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	НОД последующих коэффициентов	Значение буквы	Значение суммы
4	—1010+300И	—	10	И=3	—110
5	—110—100У	+	30	У=1	—210
6	—210+30Г	нет	нет	Г=7	0

го вариантов пришлось перебрать: всего-навсего 6. Могло быть и хуже.

Итак, читатель получил достаточное представление о решении ребусов на чашечных весах. Плюсы его ясны: во-первых, этот метод позволяет наверняка рано или поздно найти решение (лишь бы оно было); во-вторых — независимость от конкретного ребуса; в третьих — «думать не надо» (или, философски говоря, принцип экономии мышления). Ну, а минусы? Во-первых, неизвестно, сколько придется сделать шевелений, если сразу решение не получено (т. е. стоит ли овчинка выделки); во-вторых, будет найдено лишь одно решение, даже если их несколько; а в-третьих, если решения вовсе нет (например, когда неверно напечатано условие — а такое, чего греха таить, случается!), то наше положение будет просто жутким, ибо решение превратится в почти полный перебор с нулевым результатом.

Обычно в конце статьи принято предлагать задачи для самостоятельного решения. Думается, здесь это не имеет смысла: читатель может найти множество подходящих ребусов на страницах «Кванта».

И в заключение — предложение к читателям: попробуйте придумать какие-нибудь эффективные вариации и дополнения к рассмотренному методу, а также модернизировать его для решения других типов ребусов (например, на умножение, наподобие ДВА$\times$ $\times$ДВА=ЧЕТЫРЕ). И пусть вам сопутствует удача!



«Школа в „Кванте"»

Квадратное уравнение

Доктор физико-математических наук

В. БОЛТЯНСКИЙ

Прежде всего напомним, как решается квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0 \qquad (1)$$

с действительными коэффициентами p, q. Его можно переписать в виде

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(p^2-4q) \qquad (2)$$

(это легко проверить, раскрыв скобки). Число p^2-4q называют *дискриминантом* уравнения (1) и обозначают через D. Таким образом, уравнение принимает вид

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{1}{4}D. \qquad (3)$$

Теперь ясно, что если число D неотрицательно, то уравнение (1) имеет два действительных корня

$$x_1=\frac{1}{2}(-p+\sqrt{D}), \quad x_2=\frac{1}{2}(-p-\sqrt{D}), \qquad (4)$$

причем эти корни различны при $D>0$ и совпадают в случае $D=0$.

Если же D отрицательно, то уравнение (3), а потому и (1), действительных корней не имеет, поскольку ни при каком действительном x левая часть в (3) не может быть отрицательным числом. В этом случае уравнение (3) можно переписать в виде

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(\sqrt{-D}i)^2=0, \qquad (5)$$

где i — мнимая единица, т. е. $i^2=-1$*). Теперь, раскладывая левую часть на множители, получаем

$$\left(x+\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-D}i\right)\times$$
$$\times\left(x+\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-D}i\right)=0,$$

*) О комплексных числах см. статью Ю. Соловьева в «Кванте» № 7 за 1991 год.

откуда видно, что уравнение имеет два комплексных корня

$$x_1=\frac{1}{2}(-p+\sqrt{-D}i),$$

$$x_2=\frac{1}{2}(-p-\sqrt{-D}i). \qquad (6)$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Квадратное уравнение (1) с действительными коэффициентами p, q имеет два корня, вид которых зависит от значения дискриминанта $D=p^2-4q$. При $D>0$ корни действительны и различны (см. (4)), при $D=0$ они действительны и совпадают, а при $D<0$ являются комплексными (см. (6)).*

Следующую теорему установил известный французский математик Франсуа Виет (1540—1603), один из основателей буквенных обозначений и современной алгебраической символики.

Теорема 2 (Виета). *Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения (1) удовлетворяют соотношениям*

$$x_1+x_2=-p, \quad x_1x_2=q. \qquad (7)$$

В самом деле, в случае действительных корней (т. е. при неотрицательном D) мы находим из формул (4):

$$x_1+x_2=\frac{1}{2}(-p+\sqrt{D})+\frac{1}{2}(-p-\sqrt{D})=-p,$$

$$x_1x_2=\frac{1}{4}(-p+\sqrt{D})(-p-\sqrt{D})=\frac{1}{4}(p^2-D)=q.$$

В случае комплексных корней (т. е. при $D<0$) формулы Виета (7) аналогичным образом получаются из (6).

Теорема 3. *Любой квадратный трехчлен разлагается на линейные множители:*

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (1).

В самом деле, формулам Виета,

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=(x-x_1)(x-x_2).$$

Иногда при разложении на множители бывает удобно осуществлять *выделение полного квадрата* (см. (2)) вместо нахождения корней уравнения по формулам (4) или (6). Например,

$$x^2+8x-33=(x+4)^2-49,$$

откуда находим требуемое разложение

$$x^2+8x-33=(x-3)(x+11).$$

Заметим еще, что $\frac{1}{4}D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ и $\frac{1}{2}\sqrt{D}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$. Этими формулами удобнее пользоваться, если p четно.

Задачи

1. Докажите, что дискриминант D квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ равен $(x_1-x_2)^2$, где x_1, x_2 — корни этого уравнения.

2. Проверьте подстановкой, что числа, указанные в (4), являются при $D\geqslant 0$ корнями уравнения (1). Проверьте также, что при $D<0$ числа (6) являются корнями этого уравнения.

3. Решите следующие квадратные уравнеиия

а) $x^2-5=0$; б) $x^2+7=0$;
в) $x^2+3x=0$; г) $x^2-7x+12=0$;
д) $x^2-x-30=0$; е) $x^2+4x+5=0$;
ж) $x^2+10x+25=0$;
з) $x^2+2(a-1)x-(6a+3)=0$;
и) $x^2+2(a+3)x+(a^2+2a+9)=0$;
к) $x^2-2(a^2-1)x+(a^4-a^2+1)=0$;
л) $2x^2-5x+2=0$;

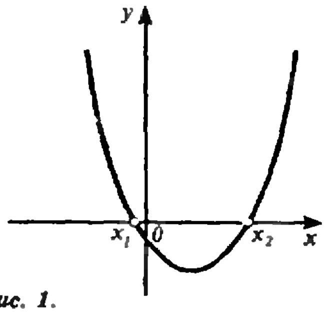


Рис. 1.

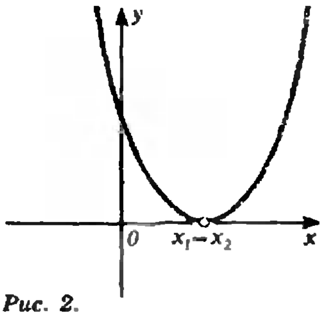


Рис. 2.

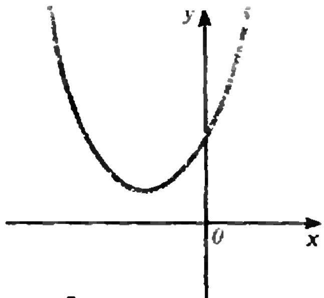


Рис. 3.

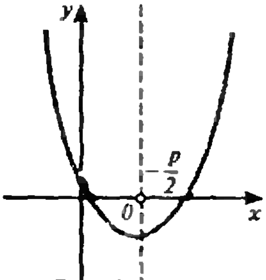


Рис. 4.

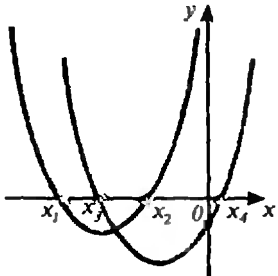


Рис. 5.

м) $(1+a)x^2+2x\sqrt{a^2+1}-(1-a)=0$.

4. Докажите, что при $D>0$ график квадратного трехчлена $y=x^2+px+q$ пересекает ось абсцисс в двух точках $(x_1;\ 0)$, $(x_2;\ 0)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$ (рис. 1). При $D=0$ график касается оси абсцисс (рис. 2). Наконец, при $D<0$ график не имеет общих точек с осью абсцисс, а расположен выше нее (рис. 3).

5. Составьте квадратное уравнение, имеющее следующие корни:

а) $x_1=1$, $x_2=-2$; б) $x_1=x_2=-4$;
в) $x_1=2-3i$, $x_2=2+3i$;
г) $x_1=a+bi$, $x_2=a-bi$;
д) $x_1=3-4i$, $x_2=2-5i$.

6. Докажите, что при любых p, q система уравнений

$$\begin{cases} y+z=-p, \\ yz=q \end{cases}$$

имеет два решения:

$$y=x_1,\ z=x_2;\quad y=x_2,\ z=x_1$$

(действительных или комплексных, различных или совпадающих), где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

7. Докажите, что график квадратного трехчлена $y=x^2+px+q$ симметричен относительно прямой $x=-\frac{p}{2}$ (рис. 4).

8. Докажите, что корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ (с действительными коэффициентами p, q) в том и только в том случае действительны и положительны, если выполнены условия

$$D\geqslant 0,\ p<0,\ q>0.$$

9. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ (с действительными коэффициентами p, q) были действительными, отличными от нуля и имеющими а) одинаковые знаки, б) разные знаки.

10. Докажите, что если один корень уравнения $x^2+px+q=0$ (с действительными коэффициентами p, q) действителен, то и второй корень действителен.

11. Докажите, что если один корень уравнения $x^2+px+q=0$ (с действительными p, q) не является действительным числом, т. е. имеет вид $a+bi$, где $b\neq 0$, то второй корень этого уравнения равен $a-bi$, т. е. также не является действительным числом.

12. Числа p и q действительны. Найдите (в зависимости от значения D) множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x^2+px+q<0$.

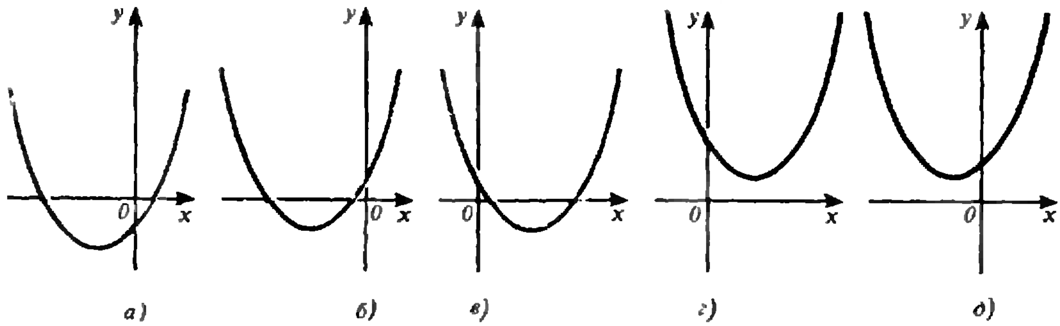


Рис. 6.

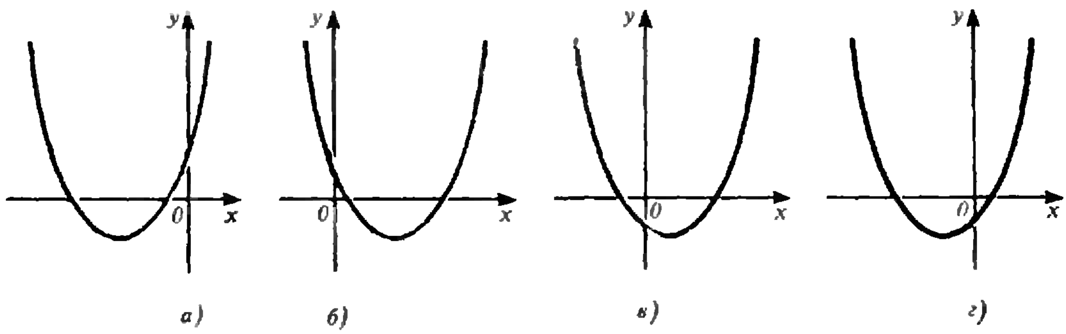


Рис. 7.

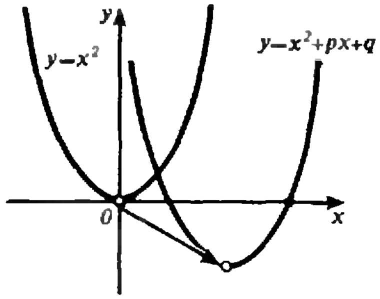


Рис. 8.

13. Решите следующие строгие квадратичные неравенства (и сделайте чертежи):

а) $x^2-5x+6<0$;   б) $x^2-10x+25>0$;
в) $x^2-x-12>0$;   г) $x^2-12x+38>0$.

14. Решите следующие нестрогие квадратичные неравенства:

а) $x-3x-18\leqslant 0$;   б) $x^2-8x+16\leqslant 0$;
в) $x^2+6x+5\geqslant 0$;   г) $x^2-14x+50\leqslant 0$.

15. Докажите, что если корни обоих квадратных уравнений

$$x^2+p_1x+q_1=0,$$
$$x^2+p_2x+q_2=0$$

действительны и находятся на отрезке $[a;\ b]$, то при любом $k>0$ корни уравнения

$$x^2+p_1x+q_1+k(x^2+p_2x+q_2)=0, \qquad (8)$$

если они действительны, лежат на том же отрезке $[a;\ b]$.

16. Докажите, что если корни x_1, x_2 уравнения $x^2+p_1x+q_1=0$ и корни x_3, x_4 уравнения $x^2+p_2x+q_2=0$ действительны и перемежаются (рис. 5), т. е. $x_1<x_3<x_2<x_4$, то при любом $k>0$ корни уравнения (8) действительны, причем один из них расположен на отрезке $[x_1;\ x_3]$, а другой — на отрезке $[x_2;\ x_4]$.

17. Докажите, что если корни x_1, x_2 уравнения $x^2+p_1x+q_1=0$ и корни x_3, x_4 уравнения $x^2+p_2x+q_2=0$ действительны и перемежаются (рис. 5), то при любом отрицательном k, отличном от -1, корни уравнения (8) действительны, причем один расположен на отрезке $[x_3;\ x_2]$, а другой — вне отрезка $[x_1;\ x_4]$.

18. При каких a уравнение $x^2+ax+6=0$ имеет целые корни?

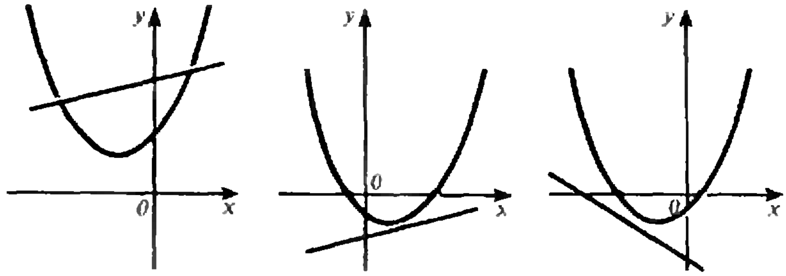


Рис. 9. *а)* *б)* *в)*

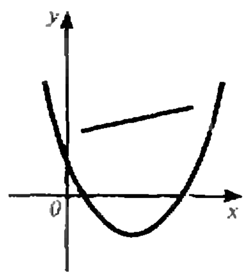


Рис. 10.

19. При каких a уравнение $(x-10)(x-a)+1=0$ имеет целые корни?

20. Укажите знаки чисел p и q, если график квадратного трехчлена $y=x^2+px+q$ имеет вид, указанный на рисунке 6.

21. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. Найдите p и q, если известно, что x_1+1 и x_2+1 являются корнями уравнения

$$x^2-p^2x+pq=0.$$

22. На оси абсцисс взята точка A, а на оси ординат — точка B (обе точки отличны от начала координат). Докажите, что существует единственный квадратный трехчлен $y=x^2+px+q$, график которого проходит через обе точки A, B (рис. 7).

23. Для каких действительных значений a квадратный трехчлен $y=x^2+2ax+1$ положителен при всех действительных x?

24. Уравнения $x^2+p_1x+q_1=0$ и $x^2+p_2x+q_2=0$ имеют действительные коэффициенты, причем $p_1p_2=2(q_1+q_2)$. Докажите, что хотя бы одно из этих уравнений имеет действительные корни.

25. Рассмотрим многочлен $f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами $a>0$, b, c. Докажите, что справедливо одно из следующих утверждений:

а) $f(x, y)=a(x-m_1y)(x-m_2y)$, где $m_1\neq m_2$ — действительные числа (*гиперболический* многочлен);

б) $f(x, y)=a(x-my)^2$, где m — действительное число (*параболический* многочлен);

в) $f(x, y)>0$ при любых действительных x, y, кроме $x=y=0$ (*эллиптический* многочлен).

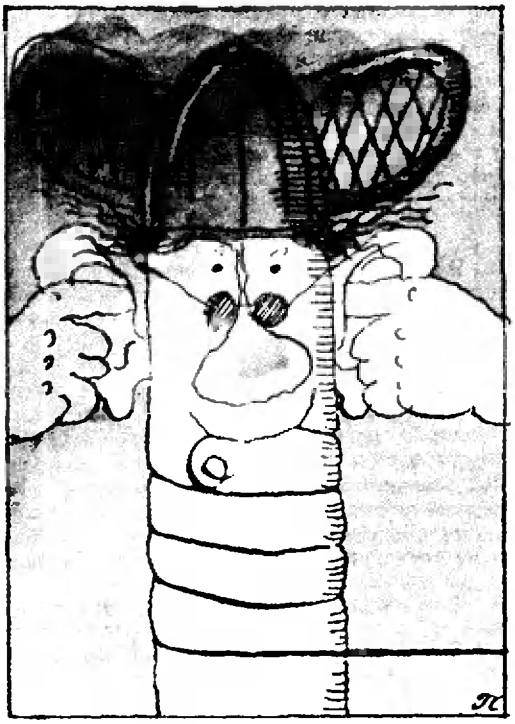
26. Докажите, что график трехчлена $y=x^2+px+q$ получается из графика $y=x^2$ параллельным переносом (рис. 8) на вектор $a=(-p/2;\ -D/4)$.

27. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} y=x^2+px+q, \\ y=ax+b \end{cases}$$

при любых a, b имеет не более двух решений (рис. 9).

28. Докажите, что внутренняя область параболы $y=x^2+px+q$, т. е. множество всех точек (x, y), для которых $y>x^2+px+q$, является *выпуклой* (это означает, что вместе с каждыми двумя точками она содержит и весь соединяющий их отрезок (рис. 10).



Лаборатория „Кванта"

Физика и гитара

П. МИХЕЕВ

Начну с того, что я — человек, не наделенный хорошим музыкальным слухом, но люблю побренчать на гитаре. И все время перед началом игры сталкиваюсь с трудно разрешимой для меня проблемой — как настроить инструмент? Вот этот вопрос и заставил меня взять ручку и сесть за письменный стол. И что же вы думаете? Физика помогла! Оказывается, достаточно подставить числа в некоторую формулу (мы ее потом получим), повернуть колки гитары необходимое число раз — и гитара настроена. Можно наслаждаться музыкой. Ну а теперь перейдем к делу — выведем магическую формулу.

Сначала определим циклическую частоту колебаний струны. Будем рассматривать колебание, содержащее всего половину длины волны (рис. 1),— такие колебания играют основную роль. Очевидно, что частота колебаний зависит от силы натяжения струны F, ее длины L и массы m. Пользуясь методом размерностей, получим формулу

$$\omega = A\sqrt{\frac{F}{Lm}},$$

где A — некий безразмерный коэффициент (проверьте сами, что только такая комбинация F, L и m имеет правильную размерность). Точное решение задачи приводит к ответу

$$\omega = \pi\sqrt{\frac{F}{Lm}}.$$

Выясним величину силы. При натяжении струны она деформируется, растягивается. Следовательно, возникает сила упругости, которая равна

$$F = ES\frac{\Delta x}{L},$$

где Δx — удлинение струны, E — модуль Юнга данного материала, S — поперечное сечение струны. Учитывая, что $m = \rho V = \rho SL$, получаем для частоты

$$\omega = \pi\sqrt{\frac{E\Delta x}{\rho L^3}}.$$

Отметим сразу же одно важное обстоятельство. Приняв $m = \rho SL$, мы ограничили наше рассмотрение сплошными однородными струнами, т. е. 1-й и 2-й струнами. У остальных струн существует дополнительная обмотка для увеличения массы.

Теперь рассмотрим процесс натяжения струны. Она наматывается на барабанчик диаметром d. На одну ось с барабанчиком насажена шестеренка, которую с помощью колка и механической передачи мы можем крутить (рис. 2). Пусть N — количество оборотов барабанчика при натягива-

Рис. 1.

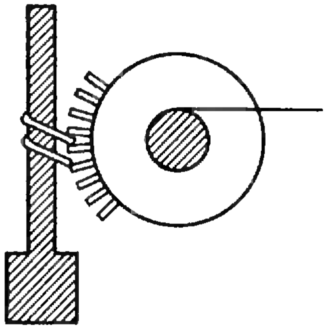


Рис. 2.

нии струны. Тогда $\Delta x = N\pi d$. Экспериментально проверено, что один оборот барабанчика происходит за $\alpha = 30$ оборотов колка. Тогда, чтобы барабанчик повернуть на N оборотов, колок надо повернуть $n = N\alpha$ раз. Значит, $\Delta x = n\pi d/\alpha$. Подставляя это выражение в формулу для циклической частоты, получим

$$\omega = \pi\sqrt{\frac{\pi E d n}{\rho L^3 \alpha}}.$$

Так как обычная частота колебаний ν связана с циклической частотой ω соотношением $\nu = \omega/(2\pi)$, то

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi E n d}{\rho L^3 \alpha}}.$$

Наконец, выразим число оборотов колка:

$$n = \frac{4\rho L^3 \alpha \nu^2}{\pi E d} = B\nu^2,$$

где $B = 4\rho L^3\alpha/(\pi E d)$.

Вычислим, чему равна константа B. Подставив $\alpha = 30$, $\rho = 7800$ кг/м^3, $L = 0{,}7$ м (для первой струны), $d = 5\cdot 10^{-3}$ м, $E = 2\cdot 10^{11}$ Па, получим, что $B = 1\cdot 10^{-4}$ Гц$^{-2}$. Итак, зная частоту звука, мы можем определить, сколько раз необходимо повернуть колок, чтобы настроить струну на нужный лад. Можно приступать к настройке гитары.

Первая струна должна быть настроена на звук «ми» первой октавы, а с физической точки зрения — на частоту $\nu \approx 300$ Гц. Получаем $n_1 = 10$ оборотов. Вторая струна — звук «си» малой октавы (≈ 247 Гц). Следовательно, $n_2 = 6{,}2$ оборота.

Но таким образом можно настроить только первые две струны. Что же делать с остальными? И тут может помочь физика.

Из теории колебаний и волн вам может быть знакомо слово «биения». Для тех, кто не помнит, постараюсь немного объяснить. Если есть два колебания с близкими частотами и они накладываются друг на друга, то получается очень интересная картинка. Пусть

$$x_1 = A\cos\omega_1 t \quad \text{и} \quad x_2 = A\cos\omega_2 t$$

— два гармонических колебания с равными амплитудами и нулевыми начальными фазами. Сложим эти колебания и получим новое:

$$x = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t,$$

или

$$x = A_0\cos\omega_{\text{ср}}t,$$

$$\text{где } A_0 = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t.$$

Так как $\omega_1 \approx \omega_2$, то $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ очень мало́, значит, A_0 слабо зависит от времени. График такого колебания приведен на рисунке 3.

Если эти колебания звуковые, то мы услышим усиление и ослабление звука. Это поможет нам настроить остальные струны. Открытая вторая струна должна звучать в унисон с третьей струной, прижатой на IV ладу. Защипнув одновременно обе струны, при частотах, очень близких между собой, мы услышим биения. При хорошей настройке можно измерить время между последующими затуханиями звука. Пусть это время T. Тогда ошибка, с которой настроена струна,

$$\varepsilon = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1}{T\nu_0},$$

где ν_0 — частота эталона. Видно, что при $T \to \infty$ ошибка становится сколь

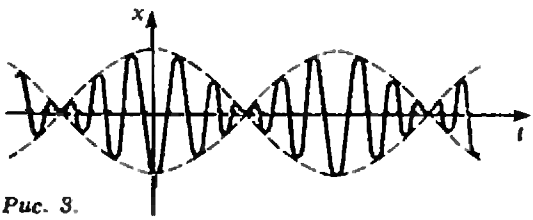


Рис. 3.

угодно малой. Чем больше период биений, тем лучше настройка.

Таким методом мы можем настроить все струны. Осталась совсем маленькая деталь. Очевидно, что струну нельзя натягивать слишком сильно — она может лопнуть. А на какую предельную величину ее можно растянуть? Предположим, что струна сделана из обыкновенной стали. Предел прочности на растяжение этого материала $\sigma_{пч}=5 \cdot 10^8$ Па. Так как

$$\sigma_{пч}=E\frac{\Delta x_{пр}}{L},$$

то

$$\Delta x_{пр}=\frac{\sigma_{пч}L}{E}=2 \text{ мм},$$

т. е. возможно было бы сделать 4 оборота и получить максимальную частоту $\nu\approx200$ Гц. Но так как струны делаются из специального сплава, то предел прочности у реальных струн выше. Его можно найти экспериментально, натягивая струну до тех пор, пока она не лопнет. Расчет легко провести по формуле

$$\sigma_{пч}=\frac{\pi dEn}{L\alpha}.$$

Порвав пару струн, я получил значение $\sigma_{пч}=5\cdot10^9$ Па, что на порядок выше, чем в случае струн из обыкновенной стали.

Как видите, из обычной гитары можно извлечь не только музыку, а и множество интересных физических фактов. Эта тема еще не закрыта. Осталось самое интересное — исследование акустических свойств корпуса гитары. Может, и здесь физика поможет? А возможно, и укажет иную форму гитары с лучшими музыкальными свойствами.

Информатика

Проблема Гольдбаха и программирование

Б. ТАРАСЕНКО

В 1724 году Петром I была основана Петербургская академия наук. Для работы в ней были приглашены многие иностранные ученые: математики Даниил и Николай Бернулли, астроном Ж. Н. Делиль, физик Г. Б. Вильфингер и другие. Без приглашения прибыл на открытие академии очень интересный человек — большой выдумщик и непоседа Христиан Гольдбах (1690—1764). Благодаря своей энергии и эрудиции, X. Гольдбах вскоре занял пост непременного секретаря академии, стал ее почетным членом. Видимо, именно его настойчивости обязана академия приезду в 1727 году великого математика Леонарда Эйлера (1707—1783).

Для Эйлера огромное значение имело его общение с Д. Бернулли (с которым он 6 лет жил на одной квартире) и с X. Гольдбахом. Когда непосредственное общение оказывалось невозможным, Эйлер заводил с ними переписку. Так, с Гольдбахом он переписывался 35 лет, с 1729 по 1764 г.

В 1742 году Христиан Гольдбах пишет Эйлеру в Берлин: «По крайней мере, кажется, что каждое натуральное число, которое больше двух, представляется в виде суммы трех простых чисел». Нужно отметить, что в то время единица считалась простым числом, поэтому числа

$$3=1+1+1,\quad 4=2+1+1,\quad 5=2+2+1$$

удовлетворяли сделанному предположению.

В ответном письме Эйлер написал по этому поводу: «...Но что каждое четное число есть сумма двух простых, я полагаю совершенно определенной теоремой, хотя и не могу ее доказать». Именно это утверждение Эйлера для четных чисел, бóльших 4, и стало называться «проблемой Гольдбаха», хотя многие ученые считают проблемой Гольдбаха задачу о возможности представления каждого натурального числа, большего 6, в виде суммы трех простых. (Единицу давно уже не считают простым числом, и оснований для этого достаточно много.) Очевидно, что из решения проблемы в формулировке Эйлера следует и решение проблемы во второй постановке. Действительно, отняв от четного числа 2 и представив полученное число в виде суммы двух простых чисел, получим требуемое представление в виде трех простых; от нечетного числа нужно отнять не 2, а 3.

Об эту проблему «обломало зубы» немало крупных ученых. Выдающийся немецкий математик Эдмунд Ландау на V Международном математическом конгрессе в 1912 году заявил, что при современном состоянии знаний проблема Гольдбаха недоступна для решения.

В 1922 году английские математики Харди и Литлвуд, опираясь на так называемую обобщенную гипотезу Римана, вывели, что каждое достаточно большое нечетное число представимо в виде суммы трех простых чисел. В 1937 году И. М. Виноградову удалось доказать это утверждение, не опираясь на гипотезу Римана, которая не доказана и до сих пор.

В этой постановке, казалось бы, проблема Гольдбаха уже практически решена, осталось лишь проверить ее справедливость для конечного числа нечетных чисел, что при современной технике не составляет большого труда. И действительно, к концу 60-х годов гипотеза Гольдбаха в формулировке Эйлера была проверена для всех четных чисел до $1\,000\,000\,000=10^9$, но число N, начиная с которого теория гарантирует выполнение гипотезы, поистине огромно:

$$N=e^{e^{16,3}}>10^{5\,643\,232}.$$

Для того чтобы проверить такое количество чисел, даже самой новейшей проектируемой сейчас ЭВМ с производительностью $10\,000\,000=10^7$ операций в секунду при 10 операциях на проверку каждого числа потребуется время, большее гипотетического возраста Вселенной!

Следовательно, нужны новые идеи. Но Эйлер, чтобы уловить закономерность в той или иной задаче, проделывал гигантский объем вычислений (про него говорили: «Он вычисляет, как другие дышат»). Вряд ли среди вас найдется человек, вычисляющий лучше Эйлера, но зато в ваших руках вычислительная техника. Для начала мы можем использовать программируемый калькулятор МК-52 или МК-61. Представляем вам программу, которая последовательно выдает разложение на два простых слагаемых каждого четного числа от 6 до 99 999 998.

После ввода программы вводится начальное число (не меньшее шести), и калькулятор начинает считать. Например, если начальное число 14, то работа с калькулятором МК-61 будет выглядеть так: F АВТ В/О 1 4 «14» С/П «14» С/П «3» С/П «11» С/П «14» С/П «7» С/П «7» С/П «16» С/П «3» С/П «13» С/П «16» С/П «5» С/П «11» С/П «18» и так далее. В кавычках указаны числа, высвечивающиеся на индикаторе. За этот промежуток работы калькулятор указал все разложения чисел 14 и 16 в сумму двух простых: $14=3+11=7+7$, $16=3+13=5+11$.

Но микрокалькулятор — медлительная машина. Так, чтобы «разобраться» с числом 6, ему требуется 13 секунд, а дальше время работы растет пропорционально величине испытуемого числа. Например, для числа 286, имеющего двенадцать различных разложений в сумму двух простых чисел, требуется 43 минуты. К счастью, кроме микрокалькуляторов существуют компьютеры, считающие гораздо быстрее. Для тех, кто имеет к ним доступ, приведем программу на языке БЕЙСИК.

Опишем алгоритм, на основе которого составлена эта программа.

Пусть задано четное число $2n$. Берем первое нечетное число k ($k=3$). Находим разность $2n-k$. Проверяем на простоту это число с помощью

00	Х→П 4	44	/ +	Начальная установка Н в Рг4 из РгХ
01	Х→П 3	43	/ +	Ввод Н из РгХ в Рг3, регистр первого простого
02	К П→Х 3	Г3	/ +	Уменьшение содержимого Рг3 на единицу
03	К П→Х 3	Г3	/ +	Уменьшение содержимого Рг3 на единицу
04	К П→Х 3	Г3	/ +	Уменьшение содержимого Рг3 на единицу
05	П→Х 4	64	/ +	Вызов текущего четного Н из Рг4 в РгХ
06	П→Х 3	63	/ +	Слагаемое С1 из Рг3 в РгХ, Н идет в РгУ
07	—	11	/ +	Слагаемое С2=Н — С1
08	Х→П 2	42	/ +	Фиксация С2 в Рг2
09	П→Х 3	63	/ +	Вызов С1 на РгХ
10	П→Х 2	62	/ +	Вызов С2 на РгХ, С1 идет в РгУ
11	—	11	/ +	Формирование разности С1 — С2=F
12	F X≥0	59	/ +	F больше или равно нулю?
13	3 2	32	/ +	НЕТ, четное исчерпано, переход на шаг 32
14	П→Х 2	62	/ +	ДА, вызов С2 на РгХ из Рг2
15	ПП	53	/ +	Переход на подпрограмму проверки простоты
16	3 7	37	/ +	с начальным адресом на шаге 37 для числа С2
17	F X≠0	57	/ +	После п/п число простое и не равно нулю?
18	0 3	03	/ +	НЕТ, число составное, равно 0, переход на шаг 03
19	П→Х 3	63	/ +	ДА, число С2 простое, вызов С1 из Рг3 в РгХ
20	ПП	53	/ +	Переход на подпрограмму проверки простоты
21	3 7	37	/ +	с начальным адресом на шаге 37 для числа С1
22	F X≠0	57	/ +	После п/п число простое и не равно нулю?
23	0 3	03	/ +	НЕТ, число составное, переход на шаг 03
24	П→Х 4	64	/ +	ДА, число С1 простое, вызов Н из Рг4 в РгХ
25	С/П	50	/ +	Стоп-индикация текущего четного числа Н
26	П→Х 2	62	/ +	Вызов С2 из Рг2 в РгХ, меньшего простого
27	С/П	50	/ +	Стоп-индикация меньшего простого слагаемого С2
28	П→Х 3	63	/ +	Вызов С1 из Рг3 в РгХ, большего простого
29	С/П	50	/ +	Стоп-индикация большего простого слагаемого С1
30	БП	51	/ +	Безусловный переход на шаг
31	0 3	03	/ +	03 для формирования новых слагаемых при том же Н
32	К П→Х 4	Г4	/ +	Добавление двойки двумя командами в шагах 32 и 33
33	К П→Х 4	Г4	/ +	к содержимому Рг4
34	П→Х 4	64	/ +	Вызов нового значения Н из Рг4 в РгХ
35	БП	51	/ +	Безусловный переход на шаг
36	0 1	01	/ +	01 к новому циклу вычислений с новым значением Н
37	Х→П 6	46	/ +	Засыл испыт. числа И из РгХ в Рг6, начало п/п
38	3	03	/ +	Константа «три», И идет на РгУ
39	—	11	/ +	И — три=К
40	F X≠0	57	/ +	К не равно нулю?
41	6 3	63	/ +	НЕТ, К=0, И=3, ход на шаг 63 к выходу из п/п
42	1	01	/ +	ДА, К=0 и формирование константы «единица»
43	Х→П 5	45	/ +	Засыл 1 в счетчик делителей Рг5 из РгХ
44	К П→Х 5	Г5	/ +	Добавление двойки к содержимому
45	К П→Х 5	Г5	/ +	Рг5 командами в шагах 44 и 45
46	П→Х 6	66	/ +	Испытуемое число И из Рг6 в РгХ
47	П→Х 5	65	/ +	Вызов текущего делителя Д из Рг5, И идет в РгУ
48	÷	13	/ +	ЧАСТНОЕ=И/Д
49	Х→П 9	49	/ +	Засыл ЧАСТНОЕ=И/Д из РгХ в Рг9
50	К П→Х 9	Г9	/ +	К=целая часть от И/Д
51	П→Х 6	66	/ +	Вызов И из Рг6 в РгХ
52	П→Х 9	69	/ +	Вызов К из Рг9 в РгХ, И идет в РгУ
53	П→Х 5	65	/ +	Вызов Д в РгХ, РгУ=К, РгZ=И
54	×	12	/ +	Д×К, И идет из РгZ в РгУ
55	—	11	/ +	ОСТ=И — К×Д, остаток от деления
56	F X≠0	57	/ +	ОСТ не равен нулю?
57	6 4	64	/ +	НЕТ (ОСТ=0), деление нацело, переход на шаг 64
58	П→Х 9	69	/ +	ДА (ОСТ≠0), вызов целого ЧАСТН в РгХ
59	П→Х 5	65	/ +	Вызов Д из Рг5 в РгХ, К идет в РгУ
60	—	11	/ +	РгХ=ЧАСТН — Д
61	F X<0	50	/ +	ЧАСТН — Д меньше нуля?
62	4 4	44	/ +	НЕТ, делители еще есть, переход на шаг 44
63	П→Х 9	69	/ +	ДА, делители исчерпаны, вызов И=П в РгХ из Рг6
64	В/О	52	/ +	Возврат в основную программу из п/п

соответствующей подпрограммы. Если число $2n-k$ просто, то проверяем на простоту число k. Если и оно простое, выводим последовательно на индикатор числа $2n-k$ и k. Если же хотя бы одно из этих чисел составное, переходим к следующему нечетному числу $k+2$ и вновь повторяем указанные действия до тех пор, пока соответствующее нечетное число не превзойдет n. После этого увеличиваем число n на единицу, т. е. переходим к следующему четному числу.

Подпрограмма проверки числа на простоту построена на следующем алгоритме, проверяющем делимость на все нечетные числа, что одновременно является и проверкой на простоту. Проверяемое число делится на p — первое нечетное число, большее 1, частное округляется в меньшую сторону до целого числа, затем из испытуемого числа вычитается произведение делителя и округленного частного. Если эта разность равна нулю, то число не простое (данный делитель p делит его нацело), если же разность не равна нулю, то число r увеличивается на 2, и вновь производится та же процедура до тех пор, пока делитель не станет больше частного.

Этот алгоритм может быть записан на алгоритмическом языке, изложенном в вашем учебнике по информатике, так:

```
алг разложение (арг цел n)
    дано n — четное число, большее 4,
         разлагающееся в сумму двух простых
    надо одно из разложений напечатано
нач
    k: =3
    нц пока НаимНечДел(k)≠k
          или НаимНечДел(n—k)≠n—k
       k: =k+2
    кц
    вывод k, n—k
алг цел НаимНечДел(арг цел n)
    дано n — нечетное число, большее 1
    надо найти наименьший нечетный
         делитель n, больший 1
нач цел k
    k: =3
    нц пока n — k • div(n, k)≠0
       k: =k+2
    кц
кон
кон
```

А вот и программа на языке БЕЙСИК:

```
1 PRINT «ГОЛЬДБАХ ЧЕТ»
2 INPUT «N=», N: N — 2
3 N=N+2 : K=1 : Y=0
4 K=K+2:P=N—K:M=P—K
5 IF M<0 THEN 3
6 X=K: GOSUB 10: IF X=0 THEN 4
7 X=P: GOSUB 10: IF X=0 THEN 4
8 Y=Y+1: PRINT N, K; «+»; P, «Y =»; Y
9 GOTO 4
10 IF X=3; GOTO 16
11 FOR D=3 TO X STEP 2
12 C=X/D: INT C
13 IF C=E; X=0: GOTO 16
14 IF C<D THEN 16
15 NEXT D
16 RETURN
```

Наша обложка

Радужные пятна на мокром асфальте

Весной и осенью, летом и даже теплой зимой можно наблюдать одно и то же явление — разноцветные масляные пятна на асфальте. Особенно много их — увы! — вблизи бензоколонок и автомобильных стоянок.

Но вот что интересно — как только на дорогах подморозит, пятна сразу тускнеют и исчезают, становятся практически незаметными для глаза. Куда они деваются? Ведь известно, что при легких заморозках никаких серьезных изменений с нефтепродуктами не происходит.

Оказывается, яркая радужная окраска масляных пятен на асфальте объясняется интерференцией света в тонких пленках масла и других нефтепродуктов, загрязняющих наши дороги. Причем, чтобы можно было наблюдать интерференцию, пленки должны быть тонкими и иметь гладкие поверхности.

Если асфальт мокрый, все поры и трещины на нем заполнены водой, а масло плавает на поверхности, растекаясь по воде ровным слоем. Когда же лужи замерзают и асфальт леденеет, условия наблюдения интерференции ухудшаются — поверхность асфальта с замерзшими лужами становится шероховатой, и, хотя масло еще остается жидким, никакой радужной окраски мы не видим.

Но лишь только лед начнет таять...

А. Митрофанов

Практикум абитуриента

Избранные задачи по термодинамике

А. КОРЖУЕВ

При решении большинства задач по физике бывает достаточно использовать хорошо известный алгоритм: сформулировать физическую модель рассматриваемого явления или процесса, переложить ее на язык физических законов и соотношений, составить систему уравнений, решить ее в общем виде и на последнем этапе произвести количественный расчет.

Однако, как показывает практика вступительных экзаменов, иногда встречаются задачи, в которых полезно прежде сделать ряд предварительных количественных оценок — от их результата будут зависеть как окончательный выбор физической модели явления, так и соответствующее ей математическое решение. Иначе может оказаться, что либо задача не решается, либо получаются совершенно неправдоподобные или противоречивые результаты.

В качестве примера рассмотрим задачи на теплообмен в замкнутых системах. Такие задачи не представляют никакой сложности, когда в условии есть указание на агрегатное состояние системы после установления термодинамического равновесия или когда информацию об этом можно получить, проведя несложные качественные рассуждения.

Гораздо сложнее решить задачу в случае, если в тепловой контакт вступали вещества различных агрегатных состояний и напрямую не сказано, в каком агрегатном состоянии будет находиться система после установления равновесия. Тут-то и потребуется провести ряд предварительных количественных оценок.

Задача 1. *В калориметре находится $m_1=2$ кг воды при температуре $t_1=5$ °С. Туда опускают кусок льда массой $m_2=5$ кг при температуре $t_2=-40$ °С. Какая температура установится в состоянии термодинамического равновесия? Сколько льда будет в калориметре? Теплоемкостью калориметра пренебречь.*

Предварительное обсуждение. В общем виде, пользуясь вышеприведенным алгоритмом, задачу решить нельзя — не известно конечное агрегатное состояние системы. А возможностей имеется целых пять. Обсудим каждую из них, используя для наглядности графики зависимости температуры тел t от количества отданной или полученной ими теплоты Q.

1) Лед нагреется до 0 °С, расплавится, и полученная из него вода нагреется до установившейся температуры $t_y>0$, «теплая» вода (при $t_1=5$ °С) остынет до той же установившейся температуры (рис. 1).

2) Лед нагреется до $t_y=0$ °С и весь расплавится, первоначально находившаяся в сосуде вода остынет до 0 °С (рис. 2).

3) Вода остынет до $t_y=0$ °С, лед на-

греется до 0 °С, и процесс теплообмена на этом прекратится (рис. 3).

4) Лед нагреется до $t_y=0$ °С, вода остынет до 0 °С и замерзнет (рис. 4).

5) Вода остынет до 0 °С, кристаллизуется, и получившийся лед остынет до температуры $t_y<0$, первоначально находившийся в сосуде лед нагреется до температуры $t_y<0$ (рис. 5).

Предварительная оценка. Теперь проведем количественные оценки и выясним, какая из пяти возможностей реализуется.

Количество теплоты, которое могла бы выделить вода при остывании до 0 °С, равно

$$Q_1=c_1m_1(t_1-0)=$$
$$=4200\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}\cdot 2\ \text{кг}\cdot 5\ \text{К}=$$
$$=42\,000\ \text{Дж}.$$

Количество теплоты, требуемое для нагревания льда от —40 °С до 0 °С, составляет

$$Q_2=c_2m_2(0-t_2)=$$
$$=2100\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}\cdot 5\ \text{кг}\cdot 40\ \text{К}=$$
$$=420\,000\ \text{Дж},$$

что в 10 раз больше, чем Q_1.

Предположение. Но может быть, вода все-таки сможет нагреть лед, если выделит еще некоторое количество теплоты, кристаллизуясь при 0 °С? Найдем это тепло:

$$Q_3=\lambda m_1=3{,}34\cdot 10^5\ \text{Дж/кг}\times$$
$$\times 2\ \text{кг}=668\,000\ \text{Дж}.$$

Окончательный вывод. Как видно,

$$Q_1+Q_3=710\,000\ \text{Дж}>Q_2=$$
$$=420\,000\ \text{Дж}.$$

Значит, вода охладится до 0 °С и частично кристаллизуется, за счет чего лед, брошенный в сосуд, нагреется до 0 °С. На этом теплообмен закончится. Иными словами, реализуется четвертая возможность.

Итак, установившаяся температура системы равна $t_y=0$ °С. И теперь мы можем ответить на вопрос задачи: сколько же льда будет в калориметре?

Собственно решение задачи. Вычислим количество теплоты, требуемое для нагревания льда до 0 °С:

$$Q'=c_2m_2(0-t_2).$$

Найдем количество теплоты, выделенное остывающей, а затем частично кристаллизующейся водой:

$$Q''=c_1m_1(t_1-0)+\lambda m_3,$$

где m_3 — масса кристаллизовавшейся воды.

По закону сохранения энергии

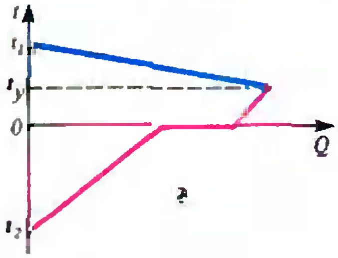


Рис. 1.

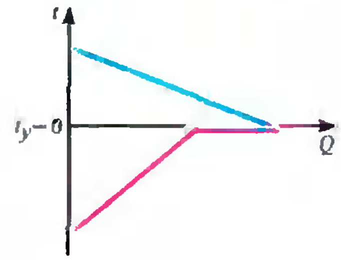


Рис. 2.

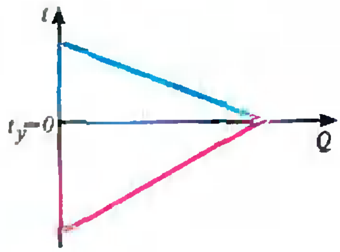


Рис. 3.

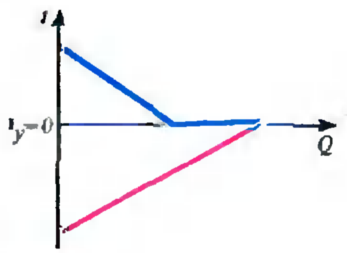


Рис. 4.

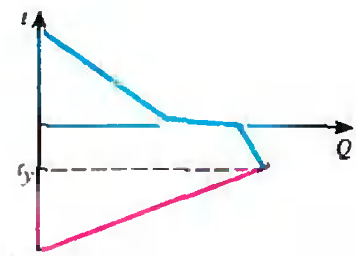


Рис. 5.

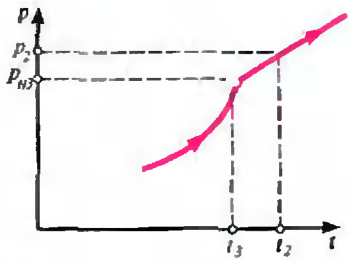


Рис. 6.

(уравнению теплового баланса) получаем $Q'=Q''$, или

$$-c_2m_2t_2=c_1m_1t_1+\lambda m_3.$$

Отсюда

$$m_3=(-c_2m_2t_2-c_1m_1t_1)/\lambda,$$

а масса льда в сосуде —

$$m_л=m_2+m_3=m_2+(-c_2m_2t_2-c_1m_1t_1)/\lambda\approx 6{,}1 \text{ кг}.$$

З а д а ч а 2. *В сосуд теплоемкостью $C_1=1{,}7$ кДж/К при температуре $t_1=20$ °С поместили $m_2=56$ г льда при температуре $t_2=-8$ °С. Какая температура установится в сосуде?*

Разобравшись в решении задачи 1, этап предварительного обсуждения вы можете проделать самостоятельно. Перейдем сразу к предварительной оценке возможностей.

Вычислим количество теплоты, которое мог бы выделить сосуд при остывании до 0 °С:

$$Q_1=C_1t_1=1{,}7\cdot 10^3 \text{ Дж/К}\cdot 20 \text{ К}=34\,000 \text{ Дж}.$$

Найдем количество теплоты, которое потребовалось бы для нагревания льда до 0 °С:

$$Q_2=c_2m_2(0-t_2)=2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}\cdot 0{,}056 \text{ кг}\times 8 \text{ К}\approx 941 \text{ Дж}.$$

Видим, что $Q_2<Q_1$, значит, лед начнет таять. Вычислим теперь количество теплоты, необходимое, чтобы растопить весь лед:

$$Q_3=\lambda m_2=3{,}34\cdot 10^5 \text{ Дж/кг}\times 0{,}056 \text{ кг}=18\,704 \text{ Дж}.$$

Получается, что потребляемое количество теплоты почти в два раза меньше выделяемого. Следовательно, растаявший лед еще вдобавок и нагреется до температуры $t_у>0$.

Теперь довести решение задачи до конца совсем просто.

Количество теплоты, отданное сосудом при остывании до конечной температуры $t_у$, равно

$$Q'=C_1(t_1-t_у).$$

Количество теплоты, требуемое для нагревания льда до 0 °С и его таяния, а также для нагревания получившейся воды, составляет

$$Q''=c_2m_2(0-t_2)+\lambda m_2+c_в m_2(t_у-0),$$

где $c_в=4200$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды. По закону сохранения энергии получаем $Q'=Q''$, или

$$C_1(t_1-t_у)=m_2(-c_2t_2+\lambda+c_в t_у),$$

откуда окончательно

$$t_у=\frac{C_1t_1-m_2(\lambda-c_2t_2)}{C_1+c_в m_2}\approx 8{,}5 \text{ °С}.$$

З а д а ч а 3. *В цилиндре под поршнем ничтожной массы находится $m_1=10$ г насыщенного водяного пара при давлении $p=100$ кПа. В цилиндр впрыскивают $m_2=5$ г воды при температуре $t_2=0$ °С. На сколько при этом опустится поршень? Площадь сечения поршня $S=100$ см^2. Теплоемкостью цилиндра пренебречь.*

Из того, что давление насыщенного пара равно 100 кПа, следует, что пар имеет температуру $t=100$ °С. Количество теплоты, которое он выделил бы при полной конденсации, равно

$$Q_1=rm_1=2{,}26\cdot 10^6 \text{ Дж/кг}\times 10^{-2} \text{ кг}\approx 22\,600 \text{ Дж},$$

а количество теплоты, которое потребуется для нагревания воды до 100 °С, составляет

$$Q_2=c_2m_2(t_1-t_2)=4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}\cdot 0{,}005 \text{ кг}\times 100 \text{ К}=2100 \text{ Дж}.$$

Видно, что $Q_2<Q_1$, следовательно, полной конденсации пара не произойдет. Пар лишь частично превратится в воду, и установившаяся температура в конце процесса будет равна $t_у=100$ °С. Массу m_3 сконденсировавшегося пара найдем из условия

$$rm_3=c_2m_2(t_1-t_2).$$

Отсюда

$$m_3=c_2m_2t_1/r,$$

а оставшаяся масса пара —

$$m_4=m_1-m_3=m_1-c_2m_2t_1/r.$$

После частичной конденсации объем пара равен

$$V'_п=\frac{m_4RT_1}{Mp},$$

где $R=8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная, $M=18$ г/моль — молярная масса воды. А объем воды равен

$$V_в=\frac{m_2+m_3}{\rho_в},$$

где $\rho_в=10^3$ кг/м³ — плотность воды.

До конденсации пар занимал объем

$$V_п=\frac{m_1RT_1}{Mp}.$$

Тогда изменение объема под поршнем, вследствие конденсации части пара, будет равно

$$\Delta V=V_п-(V'_п+V_в).$$

При этом поршень в цилиндре опустится на

$$\Delta h=\frac{\Delta V}{S}=\frac{m_2}{S}\left(\left(\frac{RT_1}{Mp}-\frac{1}{\rho_в}\right)\frac{c_2t_1}{r}-\frac{1}{\rho_в}\right)\approx$$
$$\approx 16 \text{ см}.$$

Теперь рассмотрим две задачи непосредственно на свойства насыщенного пара, в которых тоже необходимы предварительные оценки.

Задача 4. *В откачанный сосуд объемом $V=5$ л поместили $m=1$ г воды. Найдите давление паров воды в сосуде при температурах $t_1=20$ °C и $t_2=100$ °C. Давления насыщенных паров воды при этих температурах равны соответственно $p_{н1}=2{,}33$ кПа и $p_{н2}=100$ кПа.*

Прежде чем применять уравнение Менделеева — Клапейрона, необходимо выяснить, будет ли водяной пар насыщенным и если да, то какая часть воды при этом перейдет в газообразное состояние.

Начнем с температуры t_1. Предположим, для первоначальной оценки, что вся жидкость испарилась. Тогда плотность пара будет равна

$$\rho=m/V=0{,}2 \text{ кг/м}^3.$$

Посмотрев в таблицу плотностей насыщенных паров воды при различных температурах, увидим, что при 20 °C $\rho_{н1}\approx 0{,}017$ кг/м³ — наше значение плотности гораздо больше. Это означает, что не вся жидкость испарится и пар над ней будет насыщенным. Поэтому давление паров в сосуде будет

$$p_1=p_{н1}=2{,}33 \text{ кПа}.$$

Непосредственное применение формулы привело бы к результату

$$p_1=\frac{mRT_1}{MV}\approx 27 \text{ кПа (!)},$$

что более чем в 10 раз больше давления насыщенного пара при данной температуре.

Очевидно, что при дальнейшем нагревании жидкость продолжает испаряться. При полном ее испарении плотность получившегося пара станет равной вычисленному ранее значению $\rho=0{,}2$ кг/м³. Вновь обратившись к таблице плотностей, увидим, что это произойдет при температуре $t_3=70$ °C и давлении, равном давлению насыщенного пара $p_{н3}=31{,}7$ кПа. Дальнейшее увеличение давления при нагревании от $t_3=70$ °C до $t_2=100$ °C происходит в соответствии с законом Шарля $p_3/T_3=p_2/T_2$. Отсюда окончательно получаем (рис. 6)

$$p_2=\frac{p_{н3}T_2}{T_3}\approx 34{,}5 \text{ кПа}.$$

Установив по таблице плотностей, что максимальная плотность пара в сосуде соответствует температуре, меньшей 100 °C, а значит, при 100 °C пар будет уже ненасыщенным (вся вода испарится при 70 °C), его давление можно вычислить проще — из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$p_2=\frac{\rho RT_2}{M}\approx 34{,}5 \text{ кПа}.$$

Однако применение этой формулы к первому состоянию с температурой $t_1=20$ °C без предварительной оценки, показавшей, что пар насыщенный, привело бы к абсурдному результату.

Задача 5. *Камеру объемом $V=10$ л наполнили при температуре $t_1=0$ °C сухим воздухом, ввели в нее*

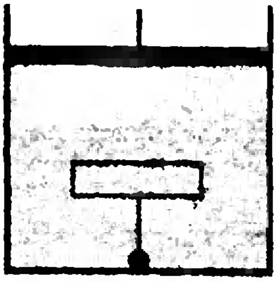


Рис. 7.

$m=3$ г воды, закрыли, а затем нагрели до $t_2=100$ °С. Какое давление установится в камере, если первоначальное давление было $p_1=10^5$ Па?

Искомое давление по закону Дальтона равно сумме давлений водяного пара и сухого воздуха.

Давление сухого воздуха, первоначально находившегося в камере, найдем по закону Шарля:

$$p_в=p_1\frac{T_2}{T_1}\approx 136{,}6 \text{ кПа}.$$

Прежде чем дать окончательное заключение о давлении пара, выясним, будет ли он насыщенным при $t_2=100$ °С. Предположив, что вся вода испарилась, оценим возможное парциальное давление пара:

$$p_п=\frac{mRT_2}{MV}\approx 51{,}7 \text{ кПа}.$$

Давление же насыщенного водяного пара при данной температуре почти в два раза больше (100 кПа). Значит, наше предположение правильное, и для полного давления в камере получим

$$p=p_в+p_п\approx 188{,}3 \text{ кПа}.$$

Если бы давление пара в предварительной оценке получилось бо́льшим, чем 100 кПа, отсюда следовало бы, что пар еще насыщенный и его давление равно 100 кПа, а полное давление в камере $p\approx 236{,}6$ кПа.

Упражнения

1. В сосуд теплоемкостью $C=760$ Дж/К, содержащий $m_1=200$ г воды при температуре $t_1=20$ °С, опустили $m_2=100$ г льда при $t_2=-10$ °С. Какая установится температура? Сколько воды будет в сосуде?

2. В сосуд, в котором находится $m_1=1$ кг воды при $t_1=30$ °С, опустили кусок льда массой $m_2=0{,}2$ кг при 0 °С с привязанным к нему на веревке металлическим шариком при 0 °С ($m_ш=30$ г, $c_ш=800$ Дж/(кг · К)) так, что лед полностью погрузился под воду (рис. 7). Затем все закрыли невесомым теплонепроницаемым поршнем площадью $S=100$ см^2. На сколько переместится поршень и какова будет температура в сосуде в конечном состоянии?

3. В сосуд теплоемкостью $C=200$ Дж/К при температуре $t_1=200$ °С налили $m_2=0{,}1$ кг воды при $t_2=60$ °С и закрыли теплонепроницаемым поршнем. Как изменится положение поршня в процессе установления теплового равновесия, если площадь сечения поршня $S=100$ см^2?

4. Сосуд объемом $V=10$ л наполнен сухим воздухом при температуре $t_1=20$ °С и давлением $p_1=10^5$ Па. Каким станет давление влажного воздуха, если в сосуд ввести $m_2=10$ г воды и нагреть его содержимое до $t_2=100$ °С?

Информация

Олимпийские интеллектуальные игры 1993 года

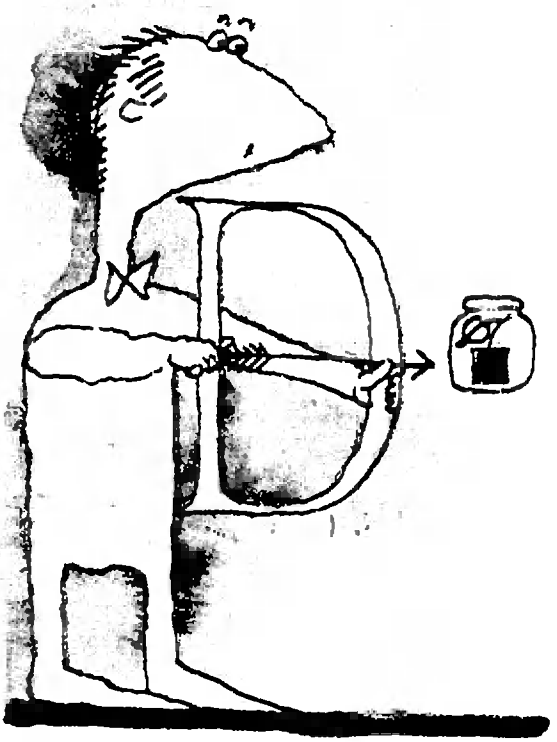
В следующем году в Англии планируется провести I Олимпийские интеллектуальные игры.

В программу I Олимпийских интеллектуальных игр вошли состязания по следующим видам: бакгамон (трик-трак), биофидбак (самовнушение), бридж, вари (калах), вычисления в уме, го, го-моку, джин-рамми, домино, китайские шахматы, компьютерное программирование, крибедж, кроссворды, логические головоломки, ма-джонг, покер, разгадывание шифров, реверси, рэндзю, скат, соревнования по запоминанию, соревнования по коэффициенту интеллектуальности, соревнования по словарному запасу, творческое тестирование, фантастические и исторические игры, шахматы, шашки, шоги, экономические игры.

Многие из этих названий вы, возможно, никогда и не слышали, однако за любым из них стоит не менее 20 миллионов человек, регулярно играющих в данную игру. Такое условие для включения игры в список установили организаторы олимпиады.

Полагаем, что вам интересно научиться играть в новые для вас игры. Поэтому мы планируем познакомить вас с некоторыми из них. С какими? Напишите нам. Мы постараемся учесть все пожелания. И как знать, не станете ли вы олимпийскими чемпионами?

А. Калинин



Практикум абитуриента

О дискриминанте

А. ЕГОРОВ

Многие задачи вступительных экзаменов способны повергнуть в ужас человека неподготовленного. Тем не менее, их часто удается решить с помощью чрезвычайно простых соображений. В этой статье мы расскажем, что можно «вытащить» из общеизвестных условий разрешимости квадратных уравнений и неравенств.

Уравнения и системы

Начнем с задачи, иллюстрирующей метод, который мы и будем применять дальше.

З а д а ч а 1. *Решите уравнение*

$$5x^2-2xy+2y^2-2x-2y+1=0.$$

Р е ш е н и е. Можно переписать это уравнение в виде

$$(x+y-1)^2+(2x-y)^2=0.$$

Однако додуматься до такого преобразования не очень просто. Поэтому мы поступим иначе: рассмотрим наше уравнение как квадратное относительно x с коэффициентами, зависящими от y:

$$5x^2-2(y+1)x+2y^2-2y+1=0.$$

Записывая условие разрешимости, получаем после преобразований

$$D/4=(y+1)^2-5(2y^2-2y+1)=$$
$$=-9y^2+12y-4=-(3y-2)^2,$$

откуда сразу следует, что $y=2/3$ (иначе дискриминант отрицателен). Теперь без труда находим, что $x=1/3$.

О т в е т: $(1/3;\ 2/3)$.

Теперь решим систему уравнений.

З а д а ч а 2 (МГУ, факультет почвоведения, 1979 г.). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0,\\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Стандартными методами с этой задачей справиться трудно. Поэтому поступим так же, как мы уже делали в первой задаче — решим первое уравнение как квадратное относительно x. Его дискриминант равен

$$D/4=-(y-3)^2.$$

Выходит, что уравнение имеет действительное решение лишь при единственном значении y, а именно при $y=3$. Теперь найдем, что $x=2$, и проверим полученное решение прямой подстановкой во второе уравнение.

О т в е т: $(2;\ 3)$.

В следующей системе число уравнений меньше числа неизвестных.

З а д а ч а 3. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x+y+z=\sqrt{3},\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Выразив x через y и z из первого уравнения, получим после подстановки во второе уравнение:

$$y^2+(z-\sqrt{3})y+z^2-\sqrt{3}z+1=0.$$

Оно квадратное относительно y с коэффициентами, зависящими от z. Его дискриминант

$$D=-3z^2+2\sqrt{3}z-1=-(\sqrt{3}z-1)^2$$

не может быть отрицательным, и потому $z=1/\sqrt{3}$. Дальнейшее ясно.

Ответ: $(1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3})$.

Задача 4. *Решите уравнение*

$$\cos x+\cos y-\cos(x+y)=3/2.$$

Решение. Преобразуя левую часть с помощью известных формул, приходим к уравнению

$$4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-4\cos^2\frac{x+y}{2}-1=0,$$

которое после замены $t=\cos\frac{x+y}{2}$ приводится к виду

$$4t^2-4\cos\frac{x-y}{2}\,t+1=0.$$

Записывая условие разрешимости, получаем неравенство

$$D/4=4\left(\cos^2\frac{x-y}{2}-1\right)\geqslant 0,$$

из которого сразу следует, что $\cos^2\frac{x-y}{2}=1$.

Осталось решить две системы уравнений

$$\begin{cases}\cos\frac{x-y}{2}=1,\\ \cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}\cos\frac{x-y}{2}=-1,\\ \cos\frac{x+y}{2}=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2(k+n)\pi;\ \pm\frac{\pi}{3}+2(k-n)\pi\right)$; $\left(\pm\frac{2\pi}{3}+\pi+2(k+n)\pi;\ \pm\frac{2\pi}{3}-\pi+2(k-n)\pi\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$.

Задача 5 (МИРЭА, 1990 г.) *При каких значениях параметра a существует единственная пара $(x;\ y)$, удовлетворяющая уравнению*

$$ax^2+(3a+2)y^2+4axy-2ax+(4-6a)y+2=0?$$

Решение. При $a=0$ получаем уравнение

$$2y^2+4y+2=0,$$

единственный корень которого $y=1$.

Легко видеть, что в этом случае решениями исходного уравнения будут все пары $(x;\ -1)$, так что $a=0$ не удовлетворяет условию.

При $a\neq 0$, как и раньше, рассмотрим исходное уравнение как квадратное относительно x:

$$ax^2+2a(2y-1)x+(3a+2)y^2+(4-6a)y+2=0.$$

Для него

$$D/4=a(a-2)(y+1)^2.$$

Если $a(a-2)<0$, то $y=-1$, $x=3$ — единственное решение. Если же $a(a-2)\geqslant 0$, исходное уравнение относительно x имеет решение при любом y.

Ответ: $0<a<2$.

Неравенства

Напомним, что неравенство

$$ax^2+bx+c\geqslant 0\ (a>0)$$

выполнено при всех x тогда и только тогда, когда

$$b^2-4ac\leqslant 0.$$

Неравенство же

$$ax^2+bx+c<0$$

имеет решения при $a>0$ тогда и только тогда, когда соответствующее уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет 2 различных корня, т. е. при $D>0$.

Решение следующей широко известной задачи достаточно хорошо иллюстрирует метод решения, основанный на перечисленных свойствах квадратичных неравенств.

Задача 6. *Докажите неравенство*

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac,$$

где a, b, c — любые действительные числа.

Указание. Неравенство

$$a^2-a(b+c)+b^2+c^2-bc\geqslant 0$$

— квадратичное относительно a с коэффициентами, зависящими от b и c. Его дискриминант, равный $-3(b-c)^2$, не положителен и равен нулю при $b=c$, причем знак равенства в исходном неравенстве возможен лишь при $a=b=c$.

А вот несколько более сложная задача.

Задача 7. *Докажите неравенство*

$$6a+4b+5c\geqslant 5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc},$$

где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$.

Решение. Положив $t=\sqrt{a}$, запишем неравенство как квадратичное относительно t:

$$6t^2-(5\sqrt{b}+7\sqrt{c})t+4b+5c-3\sqrt{bc}\geqslant 0.$$

Дискриминант квадратного трехчлена в левой части полученного неравенства равен

$$(5\sqrt{b}+7\sqrt{c})^2-24(4b+5c-3\sqrt{bc})=-71(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2,$$

т. е. отрицателен при $b\neq c$ и равен нулю при $b=c$.

Таким образом, левая часть этого неравенства всегда неотрицательна и может быть равна нулю лишь при $b=c=a$.

Задача 8. *При каких значениях a неравенство*

$$-1<\frac{ax^2+x+2}{x^2+1}<3$$

выполнено при всех x?

Решение. Из условия сразу следует переформулировка задачи: *при каких a каждое из неравенств*

$$ax^2+x+2<3x^2+3 \text{ и}$$
$$ax^2+x+2>-x^2-1$$

выполняется для всех x?

Для первого из них, $(a-3)x^2+x-1<0$, получаем условие

$$\begin{cases} a<3,\\ a<11/4,\end{cases}$$

т. е. $a<11/4$. Аналогично, для второго неравенства имеем $a>-1/3$.

Ответ: $-1/3<a<11/4$.

Задача 9 (МИФИ, 1990 г.). *При каких действительных значениях a неравенство*

$$1-\log_{1/7}(x^2+1)\geqslant\log_7(ax^2+4x+a)$$

выполняется при всех x?

Решение. Исходное неравенство равносильно системе

$$7(x^2+1)\geqslant ax^2+4x+a>0,$$

или

$$\begin{cases}(7-a)x^2-4x+7-a\geqslant 0,\\ ax^2+4x+a>0.\end{cases}$$

Последняя система выполняется при всех x тогда и только тогда, когда каждое из квадратичных неравенств выполняется при всех x, т. е. при условиях

$$\begin{cases}0<a<7,\\ 4-(7-a)^2\leqslant 0,\\ 4-a^2<0.\end{cases}$$

Решая полученную систему, приходим к ответу.

Ответ: $2<a\leqslant 5$.

В следующей задаче, прежде чем пустить в ход наш метод, приходится предварительно «обработать» условие.

Задача 10 (МГУ, экономический факультет, 1988 г.). *Найдите все значения параметра a, при которых неравенство*

$$|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a|\leqslant 3$$

выполняется для любых значений x.

Решение. Если $\cos x=0$, неравенство принимает вид

$$|a+3|\leqslant 3.$$

Его решения дают нам ограничения на a: $-6\leqslant a\leqslant 0$.

При $\cos x\neq 0$ поделим обе части неравенства на $\cos^2 x$ и выполним замену $t=\operatorname{tg} x$. В результате получим (воспользовавшись формулой $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$) неравенство

$$|(a+3)t^2+2at+a+1|\leqslant 3(1+t^2),$$

которое должно выполняться при всех t.

Это неравенство эквивалентно системе

$$-3-3t^2\leqslant(a+3)t^2+2at+a+1\leqslant 3(1+t^2).$$

При $a=0$ все неравенства справедливы. При $a\neq 0$, выписывая, как и раньше, условия, при которых эти неравенства выполняются при всех t, придем к системе неравенств относительно a и, решив ее, получим ответ.

Ответ: $-12/5\leqslant a\leqslant 0$.

Область значений функции. Максимум и минимум

При нахождении области значений функции часто оказывается полезным такое

Замечание. Пусть дана некоторая функция $y=f(x)$. Рассмотрим уравнение $f(x)=a$. Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда число a принадлежит области значений функции f.

В следующих задачах применение условия разрешимости квадратных уравнений и неравенств упрощает дело и оказывается более удобным, чем исследование функции f средствами анализа.

Задача 11. *Найдите область значений функции $y=x/(x-1)^2$.*

Решение. Задача немедленно сводится к такой: *при каких a уравнение $x/(x-1)^2=a$, или $ax^2-(2a+1)x+a=0$, имеет корни?*

Прежде всего при $a=0$ есть корень $x=0$. Если $a\neq 0$, все сводится к решению неравенства $D=4a+1\geqslant 0$.

Ответ: $[-1/4;\ +\infty)$.

Теперь несколько более трудных задач.

Задача 12. *Найдите наименьшее значение функции*

$$y=x(x+1)(x+2)(x+3).$$

Указание. Поскольку $y=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$, выполним замену $t=x^2+3x$.

Уравнение $t(t+2)=a$ имеет корни при $a\geqslant -1$, причем левая часть равна -1 при $t=-1$. Осталось убедиться в том, что уравнение $x^2+3x=-1$ имеет корни.

Ответ: -1.

Задача 13 (МГУ, мехмат, 1989 г.). *Найдите наибольшее из значений z, для которого существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению*

$$2x^2+2y^2+z^2+xy+xz+yz=4.$$

Решение. Дискриминант квадратного уравнения относительно x с коэффициентами, зависящими от y и z, должен быть неотрицателен, т. е. должно выполняться неравенство

$$D=(y+z)^2-16y^2-8yz-8z^2+32\geqslant 0,$$

или

$$15y^2+6yz+7z^2-32\leqslant 0.$$

Квадратичное неравенство относительно y имеет решения лишь тогда, когда

$$9z^2-105z^2+15\cdot 32\geqslant 0,$$

т. е. при $z^2\leqslant 5$.

Итак, $-\sqrt{5}\leqslant z\leqslant\sqrt{5}$, так что z не может быть больше, чем $\sqrt{5}$. Если $z=\sqrt{5}$, то неравенство имеет единственное решение относительно y. Но тогда существует и x (тоже единственный) такой, что тройка (x, y, z) удовлетворяет уравнению

$$2x^2+2y^2+z^2+xy+xz+yz=4.$$

Ответ: $\sqrt{5}$.

Следующая задача, хотя внешне и отличается от предыдущей, без труда к ней сводится.

Задача 14 (МГУ, биологический факультет, 1989 г.). *Числа x, y, z таковы, что $x^2+2y^2+z^2=2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x+y-z$?*

Указание. Пусть $t=2x+y-z$. Тогда после подстановки $z=2x+y-t$ в уравнение приходим к задаче, отличающейся от предыдущей только значениями коэффициентов. Предоставляем читателям проделать все необходимые вычисления самостоятельно.

Ответ: $t_{\max}=\frac{4}{3}\sqrt{6}$.

Аналогично может быть решена и следующая задача.

Задача 15 (МГУ, факультет психологии, 1986 г.). *Найдите наимень-*

шее значение, принимаемое выражением $x+5y$, если $x>0$, $y>0$ и $x^2-6xy+y^2+21\leqslant 0$.

Указание. Пусть $t=x+5y$, тогда $x=t-5y$. После подстановки и преобразований придем к задаче об отыскании наименьшего положительного значения t, для которого соответствующее квадратичное относительно y неравенство будет иметь решение.

Когда оно будет найдено, следует убедиться в существовании положительных x и y, дающих полученное значение t.

Ответ: $7\sqrt{3}$.

В заключение предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

1. Решите уравнения и системы

а) $5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=0$;

б) $\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+2x-8y+10=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16; \end{cases}$

г) (МГУ, геофак, 1982 г.)

$$\begin{cases} 8\sin x\cos y\sin(x+y)+1=0, \\ y+z=x; \end{cases}$$

д) (МГУ, ВМК, 1985 г.)

$$\sqrt{15x^2+2y^2-2z^2-3\sqrt{5}x-2y+10z-4}+\sqrt{5x^2-2\sqrt{5}x\cos\pi y\cos\pi z+1}=0.$$

2. Докажите неравенства

а) $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3\geqslant 0$;

б)* $x(1+y)+y(1+z)+z(1+x)\geqslant 6\sqrt{xyz}$.

3. Найдите наименьшее значение функции

а) $y=\dfrac{x}{x^2+x+1}$; б) $y=\dfrac{2x^2+9x+11}{3x^2+11x+12}$.

4. Найдите область значений функции

$$y=\frac{x}{(x+1)^2}.$$

5. При каких значениях a следующие неравенства выполняются при всех x:

а) $-1<\dfrac{ax^2+x+1}{x^2+x+1}<1$;

б) $\dfrac{x-2}{ax^2-2x+a-2}<1$;

в) (МГУ; экономический факультет, 1988 г.)

$|5\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a+1|\leqslant 6$.

6 (МГУ, мехмат, 1989 г.). Найдите наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению

$$x^2+2y^2+z^4+xy-xz-yz=1.$$

7 (МГУ, биофак, 1989 г.). Числа a, b, c таковы, что

$$2a^2+b^2+c^2=3.$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение $a-2b+c$?

8 (МГУ, филологический факультет, 1989 г.). Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственная тройка чисел $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющая равенствам

$$x+y+z=x^2+4y^2$$

и

$$x+2y+3z=a$$

9. Какое наибольшее значение может принимать сумма $x+3y$, если x и y удовлетворяют неравенству

$$x^2+xy+4y^2\leqslant 3?$$

10. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения

$$x^2-xy+y^2,\ \text{если}\ 2x^2+2xy+y^2=2.$$

11 (МГУ, биофак, 1985). Найдите все значения b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2-2xy+10y^2=b^4-6b^3+9b^2-19+\sqrt{85}, \\ x^2+2xy-3y^2=4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Игры и головоломки

Игра го

Немного истории

Го — одна из древнейших игр, дошедших до наших дней. Ей около 5 тысяч лет. Историки до сих пор спорят, какая из стран является родиной го. Одни специалисты считают, что эта игра зародилась в Индии, другие доказывают, что ее истоки восходят к Египту. Однако большинство сходится во мнении, что родина го — Китай.

Первым в списке претендентов на звание «отца» го (по-китайски она называется вейци) значится император Яо, правивший в XXIV—XXIII вв. до н. э. Уже тогда признавалось, что игра развивает интеллектуальные способности человека. Так, преемник императора Яо император Шунь использовал вейци для развития умственных способностей своего сына и наследника Шан Цзюня. А Конфуций отмечал, что вейци совершенствует личность человека.

Где-то в III или IV в. н. э. вейци проникла через Корею в Японию. Первоначально в нее играли монахи-буддисты, императоры же преследовали это занятие, считавшееся столь же порочным, как пьянство. 701 год стал великим годом в истории го на Японских островах: императорским эдиктом игра была признана неазартной и приравнена к упражнениям на музыкальных инструментах. Так, наконец, подпольные занятия монахов получили государственную легальность.

Шли годы. Игра проникла в широкие слои дворянства, купечества, ремесленников и даже крестьян. В 1603 г. сёгуном (правителем) Няэсу был издан эдикт об учреждении Академии го. Но вот наступил 1868 год — год так называемой «революции Мэйдзи». Микадо — император Муцухито — лично возглавил правительство страны, провел серию буржуазных реформ, обновивших общественную жизнь Японии. Го, причисленная к анахронизмам и нелепостям сметенного феодального порядка, почти исчезла из японской жизни. Однако, как это ни парадоксально, именно революция Мэйдзи, нанесшая такой удар по го внутри Японии, способствовала тому, что игра вышла на мировые просторы. После переворота 1868 г. Япония порвала с традиционной политикой изоляции от остального мира: не только идеи западной цивилизации хлынули в эту страну, начался и встречный поток. Европейцы знакомились с японскими обычаями, искусством, архитектурой, узнали они и любимую японцами игру го.

В начале XX в. в Европе стали появляться первые любительские клубы игроков го. Эмануэль Ласкер — тогдашний чемпион мира по шахматам — также заинтересовался игрой. Он быстро убедился, что она дает богатые возможности как для глубоких стратегических замыслов, так и для изящных тактических маневров. Еженедельно в доме Ласкера стали устраиваться вечера игры в го, в которых помимо хозяина принимали участие Эдуард и Бертольд Ласкеры — братья чемпиона мира, тоже очень сильные шахматисты. Ласкер, известный также и как математик, считал го идеальной игрой для математического ума. Между тем японцы, подметил он, до сих пор не выдвинули ни одного математика, который мог бы сравниться с величайшими гениями мира. Значит, это должно сказаться и в го. Сделав сей скороспелый вывод, Ласкер стал поговаривать о том, чтобы поехать в Страну восходящего солнца и встретиться там с ведущими мастерами игры.

Но случай помог чемпиону мира обойтись без дальнего вояжа. В то время в Берлине существовал японский клуб го. Трио Ласкеров отправилось туда, чтобы встретиться с одним японским игроком, не отличающимся высоким классом. Тот охотно согласился сыграть против всех троих, причем разрешил противникам консультироваться друг с другом и, более того, обещал дать вперед девять камней форы, что примерно равноценно ферзю в шахматах!

Немало удивленный, Э. Ласкер незамедлительно высказал сомнение: дескать, едва ли кто в мире сможет успешно соперничать с ним на таких условиях. Тем более что он уже довольно долго изучал теорию игры, разбирал партии японских мастеров и считал, что достиг в го достаточно глубокого понимания.

Задетый за живое, чемпион мира пытался отклонить предложение самонадеянного японца и хотел играть только на паритетных началах. Но японский игрок лишь загадочно улыбался и отрицательно качал головой.

«Ну хорошо же, хочет — пусть попробует!» Встреча состоялась. Ласкер и его союзники старательно обдумывали каждый ход, делая его лишь после длительного обсуждения между собой. Японец отвечал молниеносно, тратя на каждый ход доли секунды. Несмотря на огромную фору, японец наголову разгромил противников.

Огорченный таким исходом игры, Ласкер был вынужден признать, что, очевидно, в го таится много тонкостей, ускользнувших от его внимания. Впрочем, несмотря на такое сокрушительное поражение, Ласкер остался на всю жизнь горячим поклонником го и даже написал учебник для начинающих игроков.

В настоящее время в Японии и во всем мире проводится масса соревнований как среди профессионалов, так и среди любителей. О популярности игры можно судить по таким цифрам: только в Японии насчитывается около 10 миллионов любителей го, а во всем мире их более 20 миллионов. Регулярно проводятся чемпионаты мира, Европы, турниры «Гран-при» и другие. Начиная с 1986 г. в них стали участвовать и наши спортсмены.

Правила и понятия

Что такое го?

Представим себе, что двое путешественников попали на необитаемый остров и после того как пришли в себя, занялись дележом территории. Очевидно, в выигрыше окажется тот, кто отгородит себе территорию побольше.

Смысл игры го как раз заключается в отгораживании большей территории.

Доска для игры — тот же необитаемый остров, а игроки — путешественники, оказавшиеся на нем.

Игровое поле расчерчено 19 вертикальными и 19 горизонтальными линиями. Точки пересечения этих линий образуют 361 пункт для игры. (Здесь же расположен ряд форовых точек — для игры с форой. О ней мы в этой статье рассказывать не будем.) В комплект кроме доски входит набор фишек черного и белого цвета, которые называются камнями.

Начинающим рекомендуется использовать уменьшенную доску размером 13×13. На ней легче освоить и правила, и основные технические приемы го. Японцы считают, что, прежде чем переходить к большой доске, надо сыграть не меньше 100 партий на малой.

Итак, в го играют два партнера, у одного из которых черные камни, а у другого белые. Игра начинается с пустой доски. Ходы делаются поочередно. Первыми ходят черные. *Ход* игрока состоит в постановке камня на любой свободный пункт доски. Выставленный на доске камень не может быть перемещен в другое место и остается на ней до конца партии, за исключением тех случаев, когда он считается уничтоженным.

Если камень или группа камней уничтожены, все они снимаются с доски и учитываются только по окончании партии.

Каждый камень, стоящий на доске, имеет «дыхательные пространства» (*дамэ*). На рисунке 1, *а* показано, что у одиночного камня, стоящего в центре доски, имеется 4 дамэ, у камня, стоящего на краю доски,— 3 дамэ, а у камня, находящегося в углу (на пересечении двух пограничных линий),— только 2 дамэ. Если все дыхательные пространства перекрыты камнями противника, то такой камень считается уничтоженным и снимается с доски (рис. 1, *б*).

То же самое правило применимо и к *группе камней*. Группой называется набор камней, стоящих вплотную один к другому, которые не могут быть отделены друг от друга и уничтожены поодиночке. На рисунке 2 показана группа, состоящая из двух камней: их нельзя отделить друг от друга, и они имеют общую судьбу. У этой группы шесть дыхательных пунктов, и поэтому для снятия ее с доски требуется

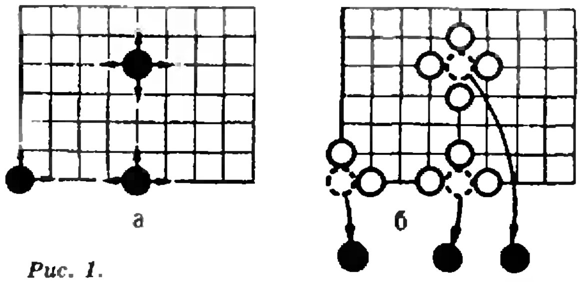


Рис. 1.

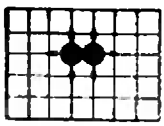


Рис. 2.

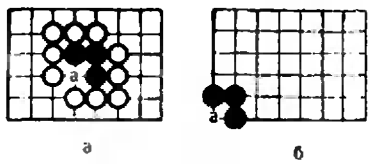


Рис. 3.

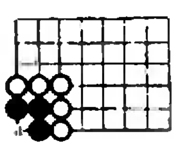


Рис. 4.

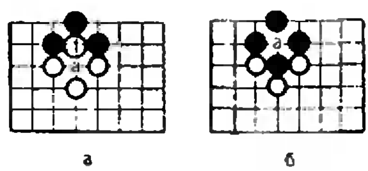


Рис. 5.

шесть камней противника. Очевидно, что для снятия одиночного камня требуется не больше 4 камней. Таким образом, чем больше камней в группе, тем сложнее ее уничтожить, т. е. она сильнее.

Мы сказали, что играющий может сделать ход в любой свободный пункт доски, но есть исключения. В го имеется два типа запрещенных ходов.

1. Запрещается делать ход, приводящий к закрытию последнего дамэ у собственных камней, если только этим ходом не уничтожаются камни противника.

Другими словами, в го запрещено делать самоубийственные ходы. Это правило, по-видимому, введено для того, чтобы избежать грубых ошибок, так как потеря собственных камней — это почти всегда плохо.

На рисунке 3, *а* приведена ситуация, в которой черные не могут сделать ход в пункт «а», так как в этом случае их камни окажутся уничтоженными. Теперь рассмотрим позицию на рисунке 3, *б*. Здесь уже белые не могут пойти в пункт «а», поскольку в этом случае их камень окажется без единого свободного дамэ. Это другой пример самоубийственного хода. Однако бывают случаи, когда такой ход все-таки возможен (рис. 4). Ситуация на этом рисунке напоминает положение на рисунке 3, *а*, но здесь камни черных вплотную окружены белыми камнями. В этом случае белые могут пойти в точку «а»: при этом уничтожаются камни противника и ход не является самоубийственным.

2. Запрещается делать ход, приводящий к повторению позиции (*правило ко*).

Рассмотрим рисунок 5, *а*. Такое расположение камней имеет специальное название — позиция ко. Черные ходом в точку «а» могут захватить камень белых 1, и тогда возникнет позиция, изображенная на рисунке 5, *б*. Теперь, если бы не существовало правила запрета повторения позиции, белые, в свою очередь, могли бы забрать камень черных ходом в точку «а» на рисунке 5, *б*. Таким образом, взаимное взятие могло бы продолжаться до бесконечности и игра потеряла бы смысл. Для того чтобы этого не произошло, и было введено правило ко.

Вернемся снова к позиции на рисунке 5, *а*. Черные взяли камень белых ходом в пункт «а». Теперь, после введения правила ко, для того, чтобы белые смогли забрать камень черных, надо, чтобы позиция изменилась, т. е. белые должны сделать ход в другом пункте доски. И только в случае, если черные не закроют *ко-борьбу* ходом в «а» на рисунке 5, *б*, белые смогут забрать камень черных.

Игра прекращается, если оба партнера отказываются от своего очередного хода. Обычно такой момент наступает тогда, когда не остается ходов, приносящих очки (рис. 6). Теперь начинается заполнение *нейтральных пунктов* (на рисунке 6 — «а» и «в»), и затем идет подсчет *очков*. Нейтральными называются такие пункты территории, которые при заполнении их камнями не приносят очков ни одному из партнеров.

Игрок, набравший наибольшее количество очков, объявляется победителем.

При подсчете очков, связанном с *пленными камнями*, снятыми во время игры, они для удобства подсчета выставляются на территорию противника. В примере на рисунке 6 черные захватили в плен три белых камня, а белые — два черных (эти камни отмечены треугольниками, далее в тексте мы будем их называть «отмеченные камни»). Затем камни перемещаются внутри своей территории (рис. 7) для образования прямоугольных областей, удобных для подсчета (перемещенные камни обозначены кружками).

Теперь уже можно легко подсчитать результат партии. Территория черных составляет 42 очка (30 очков на правой стороне доски и 12 очков в центре), а территория белых — 40,5 очков (14 очков на верхней стороне, 21 очко на нижней и 5,5 очка *коми*). Следовательно, в этой партии черные выиграли с перевесом в 1,5 очка.

Что такое коми? Это компенсация за право первого хода черных — до начала партии они отдают белым 5,5 очка (5 из них передаются в виде пяти камней и 0,5 очка — условно). Эта половина очка исключает ничейный исход игры.

Е. Гик, А. Попов

(Продолжение следует)

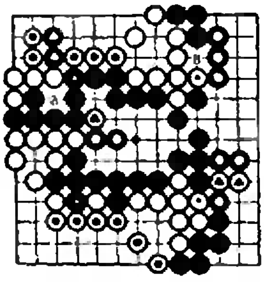


Рис. 6.

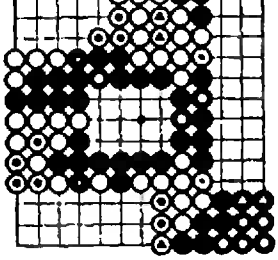


Рис. 7.

Олимпиады

Канадские математические соревнования

В предыдущем номере нашего журнала мы начали публиковать задачи школьной математической олимпиады Канады. Здесь мы предлагаем вам задание для 10 и 11 классов канадской школы (что соответствует нашим 9 и 10 классам). Задание имеет вид теста, т. е. к каждой задаче даются несколько вариантов ответа и нужно выбрать среди них правильный.

Инструкция к заданию сообщает следующее:

— разрешается использовать бумагу для черновика и больше ничего;

— каждый вопрос имеет пять возможных ответов, обозначенных буквами *A, B, C, D, E*. Лишь один из них правильный. Когда вы выберете свой вариант ответа, поставьте соответствующую букву в вашем листе с ответами;

— за неправильные ответы начисляются штрафные очки. Если вы не подумали над вопросом, неразумно пытаться угадать верный ответ;

— ваши очки $=30+$ (количество очков за правильные ответы) — (накопившиеся штрафные очки);

— чертежи нарисованы без соблюдения масштаба и приводятся лишь как приложения.

Попробуйте выполнить это задание за указанное время. Желаем удачи!

Cayley Contest (Grade 10)*)

Время: 1 час

Часть A
(по 4 очка за каждую задачу)

1. Значение выражения $\frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{16}}$ равно

(*A*) 4; (*B*) 3; (*C*) 10; (*D*) 7/4; (*E*) 5/4.

2. Выражение $3(x-2)+2(2-x)$ равно

(*A*) $x-2$; (*B*) $5x-10$; (*C*) $10-x$; (*D*) $2x-2$; (*E*) $2x+2$.

3. Длины сторон треугольника равны 6, 10 и 11. Равносторонний треугольник имеет тот же периметр. Длина каждой из его сторон равна

(*A*) 27; (*B*) 11; (*C*) 10; (*D*) 9; (*E*) 6.

4. Из чисел 1,1; 1,01; 1,001, 1,0101; 1,00101 наименьшее

(*A*) 1,1; (*B*) 1,01; (*C*) 1,001; (*D*) 1,0101; (*E*) 1,00101.

5. Если $3a=7b=6c$, то расположение чисел a, b, c в порядке убывания таково:

(*A*) c, a, b; (*B*) b, c, a; (*C*) b, a, c; (*D*) a, b, c; (*E*) a, c, b.

6. Если $y=3x+2$, то x через y выражается так:

(*A*) $x=y-1$; (*B*) $x=y-2$; (*C*) $x=y-5$; (*D*) $x=(y-2)/3$; (*E*) $x=(y+2)/3$.

7. Рассмотрим множество всех четырехзначных положительных чисел, в каждом из которых все цифры различны. Разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел равна

(*A*) 8888; (*B*) 8876; (*C*) 8853; (*D*) 8646; (*E*) 8642.

8. Значение выражения $2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+2}}$ равно

(*A*) 3; (*B*) 7; (*C*) $2\frac{2}{5}$; (*D*) $2\frac{2}{3}$; (*E*) $2\frac{4}{5}$.

9. Все данные на рисунке 1 даны в градусах. Величина y равна

(*A*) 15; (*B*) 20; (*C*) 30; (*D*) 45; (*E*) 50.

10. Если $a\square b=ab+a+b$ и $3\square 5=2\square x$, то x равен

(*A*) 4; (*B*) 6; (*C*) 7; (*D*) $7\frac{1}{2}$; (*E*) $11\frac{1}{2}$.

Часть B
(по 5 очков за каждую задачу)

11. Если $x=-3$, а $y=-1$, то значение выражения $\frac{(x-y)^3}{x^3-y^3}$ равно

(*A*) 4/13; (*B*) 2/7; (*C*) 1; (*D*) 16/7; (*E*) 32/13.

12. Целое число называется восходящим, если каждая его цифра больше предыдущей. Например, таким числом является 2478. Количество восходящих чисел между 4000 и 5000 равно

(*A*) 7; (*B*) 8; (*C*) 9; (*D*) 10; (*E*) 11.

13. Если диагональ квадрата равна 2 см,

*) Соревнования имени Кэли (10 класс).

то его площадь (в квадратных сантиметрах) равна

(*A*) 1; (*B*) $\sqrt{2}$; (*C*) 2; (*D*) $2\sqrt{2}$; (*E*) 4.

14. Когда x разделили на 6, получился остаток 3. Остаток от деления $3x$ на 6 равен

(*A*) 4; (*B*) 3; (*C*) 2; (*D*) 1; (*E*) 0.

15. Некоторая дуга является шестой частью окружности, заключающей площадь в 144π. Длина этой дуги равна

(*A*) 24π; (*B*) 12π; (*C*) 6π; (*D*) 4π; (*E*) 2π.

16. Значение выражения $1/2+(1/2+1/3)+(2/3+1/4)+(3/4+1/5)+(4/5+1/6)+(5/6+1/7)+(6/7+1/8)+(7/8+1/9)+(8/9+1/10)$ равно

(*A*) 7,1; (*B*) 8,1; (*C*) 8,5; (*D*) 9,1; (*E*) 9,5.

17. Количество цифр в десятичной записи числа $4^5\,5^{11}$ равно

(*A*) 12; (*B*) 13; (*C*) 18; (*D*) 19; (*E*) 24.

18. На углу прямоугольного дома размером 10×20 метров с внешней стороны находится электрическая розетка. 15-и метровый шнур соединяет с розеткой электрокосилку. Наибольшая площадь газона, которую можно скосить этой косилкой, равна (в квадратных метрах)

(*A*) $225\pi-50$; (*B*) $725\pi/4$; (*C*) 225π; (*D*) $675\pi/4$; (*E*) 175π.

19. ABC — треугольник со сторонами a, b и c, как показано на рисунке 2. Если угол C равен 90°, $c=4$, и $a+b=18$, то площадь треугольника ABC равна

(*A*) 0,5; (*B*) 1; (*C*) 2; (*D*) 4; (*E*) 18.

20. Если $x+y=2z$ и $x\neq y$, то $\dfrac{x}{x-z}+\dfrac{y}{y-z}$ равно

(*A*) -4; (*B*) -2; (*C*) 0; (*D*) 2;

(*E*) не определяется единственным образом.

Часть C

(по 6 очков за задачу)

21. Бетти навестила свою подругу Кейт и затем вернулась домой той же дорогой. Она всегда ходит в гору со скоростью 2 км/час, под гору со скоростью 6 км/час и 3 км/час по ровной дороге. Если ее прогулка заняла 6 часов, то общее расстояние, которое она прошла (в километрах) равно

(*A*) 9; (*B*) 12; (*C*) 18; (*D*) 22; (*E*) 36.

22. Прямую $y=3x+1$ отразили относительно прямой $y=4$. Отраженная прямая задается уравнением

(*A*) $y=x/3+1$; (*B*) $y=-x/3+7$; (*C*) $y=-x/3+6$; (*D*) $y=-3x+6$; (*E*) $y=-3x+7$.

23. Вершины многогранника P — середины ребер прямоугольного параллелепипеда. Сумма количества ребер и количества граней многогранника P равна

(*A*) 46; (*B*) 38; (*C*) 36; (*D*) 18; (*E*) ни одно из них.

24. Рассмотрим все трехзначные числа, составленные только из нечетных цифр. Сумма всех этих чисел равна

(*A*) 69 375; (*B*) 19 375; (*C*) 625^3; (*D*) 78 125; (*E*) 125.

25. В треугольнике ABC угол B равен 90°, $AB=20$, а длины остальных двух сторон являются целыми числами (рис. 3). Количество таких треугольников

(*A*) 3; (*B*) 4; (*C*) 5; (*D*) 6; (*E*) 7.

Fermat Contest (Grade 11)

Время: 1 час

Часть A

(по 4 очка за каждую задачу)

1. Выражение $\dfrac{1-3/4}{4/3-1}$ равно

(*A*) $3/4$; (*B*) $1/12$; (*C*) -1; (*D*) $4/3$; (*E*) $-9/16$.

2. См. задачу 4 для 10 класса.

3. Число $0{,}435:0{,}0821$ приблизительно равно

(*A*) 50; (*B*) 5; (*C*) 0,5; (*D*) 0,2; (*E*) 0,05.

4. Расстояния между столбами изгороди равны по 5 м. Количество столбов, необходимое для того, чтобы огородить треугольный участок со сторонами 20 м, 20 м и 30 м равно

(*A*) 11; (*B*) 13; (*C*) 14; (*D*) 15; (*E*) 17.

5. См. задачу 11 для 10 класса.

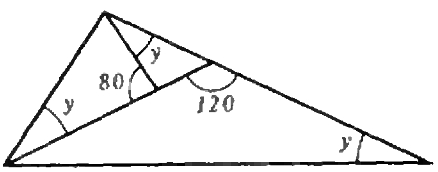


Рис. 1.

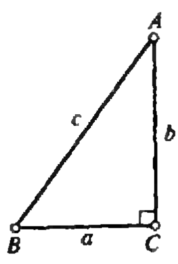


Рис. 2.

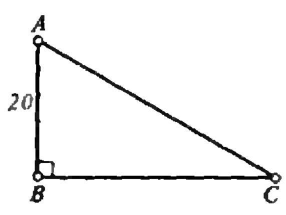


Рис. 3.

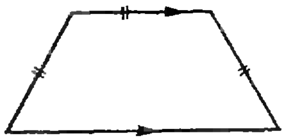


Рис. 4.

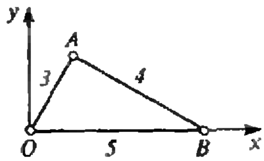


Рис. 5.

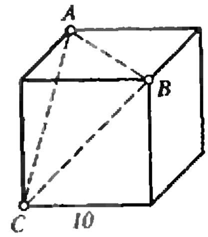


Рис. 6.

6. См. задачу 7 для 10 класса.
7. См. задачу 10 для 10 класса.
8. Если $1/3+1/4+1/n=1$, то n равно

(A) 12/11; (B) 11/12; (C) 12/5; (D) 5/12;
(E) 5.

9. См. задачу 15 для 10 класса.
10. Чтобы получить число $1/b$, к числу $1/(b+2)$ следует прибавить

$(A)\ -\frac{1}{2}$; $(B)\ \frac{2}{b(b+2)}$; (C) 2; $(D)\ \frac{1}{b+2}$;
$(E)\ \frac{2(b+1)}{b(b+2)}$.

Часть B
(по 5 очков за каждую задачу)

11. См. задачу 12 для 10 класса.
12. Если $f(x)=x^3$ и $a\neq b$, то $f(a)/f(b)$ равно

$(A)\ (a/b)^3$; $(B)\ (a/b)^{0}$; $(C)\ (a-b)^3$;
$(D)\ a/b$; $(E)\ a^3-b^3$.

13. Если $(3x-1)(x-2)=0$, то $3x-1$ может быть равно

(A) только 1/3; (B) только 0; (C) 1/3 или 0;
(D) 1/3 или 2; (E) 0 или 5.

14. См. задачу 18 для 10 класса.
15. См. задачу 22 для 10 класса.
16. Три стороны трапеции равны, а длина основания на две единицы меньше суммы длин этих трех сторон (рис. 4). Если расстояние между параллельными сторонами равно 5, то площадь трапеции, выраженная в квадратных единицах, равна

(A) 13; (B) 35; (C) 65; (D) 125; (E) 185.

17. Угловой коэффициент прямой OA на рисунке 5 равен

(A) 4/3; (B) 3/4; (C) 5/3; (D) 3/5;
$(E)\ \sqrt{5/2}$.

18. Между числами 60 и 80 находятся два делителя числа $(4^{12}-1)$, это

(A) 67 и 75; (B) 65 и 75; (C) 63 и 65;
(D) 61 и 68; (E) 61 и 65.

19. Куб с ребром 10 разделен на две части плоскостью ABC (рис. 6). Объем меньшей части равен

$(A)\ 200\sqrt{2}$; $(B)\ 100\sqrt{2}$; $(C)\ 333\frac{1}{3}$;
(D) 250; $(E)\ 166\frac{2}{3}$.

20. Если $2^{3x}=16^{y+1}$ и $2x=5y-2$, то $x+y$ равно

(A) -1; (B) 2; (C) 3; (D) 13/3; (E) 6.

Часть C
(по 6 очков за задачу)

21. Каждая из четырех окружностей, изображенных на рисунке 7, касается трех остальных. Если радиус каждой из маленьких окружностей равен r, то радиус большой окружности равен

$(A)\ \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}r$; $(B)\ (1+\sqrt{3})r$; $(C)\ \frac{3\sqrt{3}+4}{4}r$;
$(D)\ (2+\sqrt{3})r$; $(E)\ 2\sqrt{3}r$.

22. Последовательность чисел $t_1, t_2, t_3, \ldots$ определяется соотношениями $t_1=7$, $t_{n+1}=\sqrt{|t_n^2-16|}$. Число t_{80} равно

$(A)\ \sqrt{15}$; $(B)\ \sqrt{17}$; $(C)\ 79\sqrt{33}$; (D) 1;
$(E)\ \sqrt{6384}$.

23. На рисунке 8 точки E и F на сторонах квадрата $ABCD$ таковы, что $AE:EB=CF:FD=2:1$. Отношение площади параллелограмма $EGFH$ к площади квадрата $ABCD$ равно

(A) 1/9; (B) 2/9; (C) 1/3; (D) 4/9;
(E) ни одно из них.

24. См. задачу 25 для 10 класса.
25. Если $f(x)=3x^2-2x+5$ и $f(g(x))=12x^4+56x^2+70$, то возможное значение суммы коэффициентов многочлена $g(x)$ равно

(A) -7; (B) $-19/3$; (C) $-7/3$;
(D) 3; (E) 23.

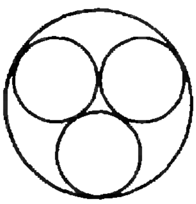


Рис. 7.

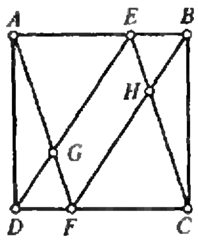


Рис. 8.

Публикацию подготовили А. Котова, А. Савин

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов по математике в различные вузы

Предлагаем подборку задач письменных и устных вступительных экзаменов по математике в некоторые университеты — Воронежский (1) Донецкий (2), Киевский (3), Петрозаводский (4), Уральский (5), Московский технический университет связи и информатики (6) и педагогические институты — Киевский (7), Минский (8), Нижегородский (9), Ярославский (10).

Алгебра

1 (10). Участок дороги между городами A и B имеет подъем, а затем спуск, причем тот и другой одинаковой длины. Найдите среднюю скорость автобуса на пути из A в B, если скорость автобуса на подъеме равна 40 км/ч, скорость на спуске — 80 км/ч, а расстояние между городами A и B равно 160 км. Зависит ли значение средней скорости от расстояния между городами?

2 (9). Велосипедист должен проехать 36 км за определенное время. После двух часов пути он сделал остановку на 20 минут и, чтобы ликвидировать отставание, оставшийся путь проехал со скоростью, большей прежней на 6 км/ч. Какова первоначальная скорость велосипедиста?

3 (7). Поле разбили на три участка. За день вспахали 1/2 первого, 3/4 второго и весь третий участок, который составляет 1/4 часть всего поля. Вспаханная площадь в два раза больше площади второго участка. Какую часть всего поля составляет площадь, вспаханная за день?

4 (7). Лодка прошла по течению реки 34 км и 39 км против течения, затратив на это столько времени, сколько ей нужно, чтобы пройти в стоячей воде 75 км. Найдите отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения.

5 (6). Имеется три сплава. Первый содержит 30 % никеля и 70 % марганца, второй — 10 % марганца и 90 % меди, третий — 15 % никеля, 25 % марганца и 60 % меди. Из них приготовлен сплав, масса которого 15 кг, содержащий 40 % меди и 42 % марганца. Какое количество первого, второго и третьего сплава взяли для этого?

6 (5). Для проведения эксперимента по выращиванию биомассы были использованы три пробирки. После эксперимента оказалось, что в первой и второй пробирках вместе биомассы в два раза больше, чем в третьей, а во второй и третьей вместе в три раза больше, чем в первой. В какой из пробирок биомассы первоначально было меньше, если ее прирост в первой пробирке составил 40 %, во второй — 60 % и в третьей — 50 %?

7 (1). Вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 денежным единицам, к концу следующего года — 749 денежным единицам. Если бы первоначально 5/6 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определите величину вклада по истечении двух лет.

8 (5). Партия телевизоров проходит испытание на долговечность. После первого года работы отказало 15 телевизоров, а после второго — еще 4. Сколько телевизоров было исправно после первого года работы, если известно, что отношение числа телевизоров, исправных к концу второго года, к числу телевизоров, исправных к началу этого года, на 8,75 % больше, чем такое же отношение, составленное для первого года испытаний?

9 (6). Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из A в B и из B в A. После встречи одному придется быть в пути еще два часа, а другому 9/8 часа. Определите скорости автомобилей, если $AB = 210$ км.

10 (1). Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как первый проработал 7 часов, а второй — 4 часа, оказалось, что они выполнили 5/9 всей работы. Проработав совместно еще 4 часа, они установили, что им остается выполнить 11/18 всей работы. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

11 (5). Бак имеет форму прямоугольного параллелепипеда. К нему подведены три трубы: одна сверху, одна снизу, а одна — к центру боковой грани. В трубу сверху вода вливается, а через две остальные выливается. Если открыть только нижнюю трубу, то полный бак пустеет за 8 часов. Если открыть и нижнюю и боковую трубы, то полный бак опустошается за 7 часов. Если же в пустом баке открыть все три трубы, то он наполняется за 5 часов 24 минуты. За какое время заполнится пустой бак, если открыть только верхнюю трубу?

12 (2). Первая машинистка должна отпечатать 40 страниц текста, вторая — 50. Начали работу они одновременно. Вторая машинистка, которая печатает на 2 страницы в час больше первой, после двух часов работы сделала перерыв на 30 минут, а затем стала печатать на 2 страницы в час больше, чем до перерыва. В итоге машинистки закончили работу одновременно. Найдите скорость печатания первой машинистки. В каких пределах может меняться скорость печатания первой машинистки, чтобы, при всех прочих условиях, вторая машинистка закончила работу не позже первой?

13 (2). Первый экскаватор должен выкопать 72 метра канавы, а второй — 60 метров. Производительность второго экскаватора на 2 м/ч меньше производительности первого. Первый экскаватор приступил к работе на час позже второго и, проработав 5 часов, сделал перерыв на 48 мин. Увеличив после этого свою производительность на 2 м/ч, он закончил работу одновременно со вторым, который работал без перерывов и с постоянной производительностью. Найдите первоначальную производительность первого экскаватора. В каких пределах может меняться первоначальная производительность первого экскаватора, чтобы, при тех же условиях работы, он выполнил свое задание не позже второго?

14 (2). Водитель грузовика, участвующий в ралли, рассчитывает проехать всю трассу со скоростью 80 км/ч. Из-за неполадок первую треть пути он ехал со скоростью, на a км/ч меньшей расчетной, зато потом, устранив неполадки, он увеличил свою скорость на $2a$ км/ч по сравнению с предполагавшейся, и эта скорость сохранялась до конца пути. При каком значении a трасса будет преодолена скорее всего?

15 (6). Найдите трехзначное число, цифры которого составляют геометрическую прогрессию с суммой 19 и цифра сотен которого на 5 больше цифры единиц.

16 (6). Три числа x, y, z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа x, $2y$, $3z$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, отличный от единицы.

17 (1). В геометрической прогрессии сумма первых трех членов равна 9, а сумма первых шести членов равна -63. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

18 (6). В геометрической прогрессии первый член равен 1, а сумма первых пяти членов в восемь раз превосходит сумму обратных величин этих же членов. Найдите знаменатель прогрессии.

19 (4). Найдите знаменатель знакопостоянной геометрической прогрессии, если произведение ее первых четырех членов равно 4, а сумма кубов первых трех членов, деленная на первый член, равна $73/4$.

20. Вычислите:

а) (6) $96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\times$ $\times\cos\frac{\pi}{6}$;

б) (6) $\sin\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$;

в) (6) $\dfrac{\log_5 250}{\log_{50}5}-\dfrac{\log_5 10}{\log_{1250}5}$.

21. Докажите тождество:

а) (7) $\dfrac{4\sin\alpha\times(1-\mathrm{tg}^2\,\alpha)}{\sec(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)}=\sin 4\alpha$;

б) (6) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha$.

22 (6). Вычислите значение выражения
$$\frac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\frac{4p^2-3pq}{2+pq^2}$$
при $p=0{,}78$ и $q=0{,}28$.

23. Упростите выражение:

а) (2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right):$ $:\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$,

где $x=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$, $a>0$, $b>0$;

б) (2) $\dfrac{a-b}{\sqrt{b}}x^2-2ax+a\sqrt{b}$,

где $x=\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $a>0$, $b>0$;

в) (6) $((\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^{-2}+(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^{-2}):$ $:\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$.

24 (6). Вычислите производную функции

$$y=\left(\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x}-27}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{x},$$

если $x\in[0;\ 9)$.

25 (6). После упрощения найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x)=\left(\frac{1+\sqrt{3x}}{\sqrt[4]{3x}}-\sqrt[4]{3x}\right)^{-2}\times$$
$$\times\left(1+\sqrt{\frac{12}{x}}+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2},$$

если $x\in[1;\ 4]$.

26. Решите уравнение:

а) (6) $\frac{x^3+64}{16+4x}=11-\frac{x}{4}$;

б) (7) $\sqrt{2x-1}=x-2$;

в) (7) $\sqrt{x^2-5x+7}=2x-3$;

г) (6) $2\sqrt[4]{3x+\frac{1}{9}}+3\sqrt{3x+\frac{1}{9}}=1$;

д) (6) $3x^2-42x-38=7\sqrt{x^2-14x-14}$;

е) (7) $25^x-6\cdot5^x+5=0$;

ж) (4) $\log_{1-x}(4x^2-9x+1)=3$;

з) (6) $\sqrt{\log_5^2x+\log_x^25+2}=2{,}5$;

и) (1) $2x(\log_26-1)=\log_2(x+9^x-18)$;

к) (5) $\log_3(x-1)^3-\log_{\sqrt{x-1}}3-$ $-\log_{10-x}(x-10)^2=3$;

л) (6) $(2x^2-x-6)\arccos\left(\frac{1}{x+2}\right)=0$.

27. Решите тригонометрическое уравнение:

а) (9) $\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$;

б) (9) $(\sin x+\cos x)^2=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

в) (9) $\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}=2\sin\frac{x}{2}$;

г) (7) $2\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x=3$;

д) (7) $\frac{\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{x+2}}=0$;

е) (7) $1-\cos x=\sin x$;

ж) (4) $\cos x-\sin x=2\sin x\sin 2x$;

з) (6) $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x+1}+\right.$ $\left.+\frac{1}{\operatorname{tg}x-1}\right)=4$;

и) (6) $\sin^4x+\cos 2x=\frac{1}{4}$;

к) (1) $\operatorname{tg}3x=\sin 6x$;

л) (1) $6\sin^2x+3\sin x\cos x-5\cos^2x=$ $=2$;

м) (5) $2\cos 2x+4\sin 2x=7-2\sin^2x-$ $-20\cos^2x$, если $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right]$;

н) (6) $2\sin^4x+2\cos^4x=7\sin x\cos x$, если $x\in[-\pi;\ \pi/2]$;

о) (4) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+$ $+\cos 2x+\cos 3x$;

п) (5) $\sin 5x-\cos 7x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

р) (2) $\sin 7x+\cos 2x=-2$;

с) (2) $\cos x\cos 6x=-1$;

т) (5) $\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0$;

у) (1) $\log_2\cos 2x-\log_2\sin x-$ $-\log_2\cos x=1$;

ф) (2) $\log_{\frac{x+6-x^2}{4}}\left(1+\cos^2\frac{\pi x}{2}\right)=$
$=\log_{\frac{x+6-x^2}{4}}\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\sin\frac{3\pi x}{2}\right)$;

х) (2) $\log_{\frac{4x-x^2}{3}}\left(\cos^2\frac{\pi x}{3}\right)=$
$=\log_{\frac{4x-x^2}{3}}\left(\frac{1}{4}-\sin\frac{\pi x}{3}\sin\pi x\right)$.

28. Решите неравенство:

а) (7) $\frac{x+8}{x^2+4x-5}\geqslant0$;

б) (6) $|x^2-2x-8|>2x$;

в) (7) $\sqrt{3x+x^2}\geqslant1+x$;

г) (5) $\sqrt{6\cdot25^x-11\cdot30^x+5\cdot36^x}<2\cdot5^x$;

д) (6) $||7^x-x^2|-2|<12-x^2-7^x$;

е) (1) $(x^2-4x+3)^{x^2-5x}>1$;

ж) (10) $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}\leqslant3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$;

з) (10) $\log_2(5x-4-x^2)+\log_3(3-x)\geqslant$ $\geqslant\log_2(4-x)+\log_3(4x-3-x^2)$;

и) (9) $\frac{\sqrt{6-x}}{\log_{1/3}(x-3)-1}\geqslant0$;

к) (9) $\log_{x/5}(x^2-8x+16)\geqslant0$;

л) (9) $|\log_{1/3}(4-x^2)|\geqslant2$;

м) (7) $\log_2(x^2-4x+3)\leqslant3$;

н) (6) $\log_3x+\log_{\sqrt{3}}x<6+\frac{1}{\log_x3}$;

о) (2) $\log_{1/2}(x+1)>\log_2(2-x)$;

п) (6) $\log_{0,2}(x^2-x-2)>$
$>\log_{0,2}(-x^2+2x+3)$;

р) (6) $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>16$;

с) (3) $\log_{\frac{x+1}{x-1}}(2x^2-5x+3)\leqslant 0$;

т) (3) $\log_{1/3}(4^{x-2}-3)+1>$
$>\log_{1/3}(3^{-1}2^{x-2}+3)$;

у) (5) $\log_{x^4}\dfrac{|x-5|}{5x^3}+\dfrac{3}{4}\geqslant 0$;

ф) (5) $\log_{x^2}(3x+10)\geqslant 1$;

х) (4) $\log_2(x+1)>\log_{x+1}16$;

ц) (1) $\lg^2 x^2-2\lg x^2>3$;

ч) (1) $\log_{1/3}(3x+4)>\log_{1/3}(x^2+2)$;

ш) (4) $3^{2/x}+2x\cdot 3^{1/x}-18x-81<0$;

щ) (1) $2^{-|x-2|}\log_2(4x-x^2-2)\geqslant 1$.

29. Решите систему уравнений:

а) (6) $\begin{cases} y^2-x-5=0, \\ \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}; \end{cases}$

б) (4) $\begin{cases} \dfrac{1}{xy}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}, \\ x^2y+xy^2=2; \end{cases}$

в) (7) $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9, \\ x+y=20; \end{cases}$

г) (6) $\begin{cases} 3^{x-\sqrt{y+1}}=1, \\ 2^{x+3}=0{,}5\cdot 4^{y+2,5x}; \end{cases}$

д) (9) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^{1+y}=24, \\ \log_3(y-x)=0; \end{cases}$

е) (6) $\begin{cases} 4^{-y}\cdot\log_2 x=4, \\ \log_2 x+2^{-2y}=4; \end{cases}$

ж) (5) $\begin{cases} 2\cos^2(x-y)=5\cos x\cos y- \\ \quad -\sin x\sin y, \\ x+y=\dfrac{5\pi}{3}; \end{cases}$

з) (3) $\begin{cases} \sin x\cos y=1/4, \\ 3\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y. \end{cases}$

30 (7). Сколько решений может иметь уравнение

$$|x|-5=\frac{a-4}{|x|}$$

в зависимости от параметра a?

31 (7). Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x+3a-5}{x-a}<0$$

выполняется для всех $x\in[0;4]$.

32 (1). Найдите все пары $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$25^x-2\cdot 5^x\cdot\cos^2\frac{y}{2}+1=0.$$

33 (9). При каких значениях a графики функций

$$y=2ax+1 \text{ и } y=(a-6)x^2-2$$

не пересекаются?

34 (5). При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (a-1)y^2-2(3a+1)y+9a=0, \\ y=-\sqrt{x-3}+2 \end{cases}$$

имеет решение?

35 (6). При каких значениях a уравнение

$$2x^2-4a^2x-a^2+1=0$$

имеет два действительных корня одного знака?

36 (1). Найдите все значения параметра b, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2-2bx-1=0$ действительны и не превосходят по модулю 2.

37 (3). При каких значениях α уравнение

$$1-x=\sqrt{x^2-2\sin^2\alpha}$$

имеет решения? Найдите эти решения.

38 (7). Найдите все целые числа x и y, для которых выполняется равенство $2xy+x+y=83$.

Анализ

1 (6). Найдите площадь области, ограниченной линиями

$$y=\frac{|x|}{2},\ y=1,\ y=3.$$

2 (7). Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=2x-x^2$ в точке $x_0=2$.

3. Решите неравенство:

а) (6) $\varphi'(x)>f'(x)$,

если $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$, $\varphi(x)=5x+\dfrac{1}{x}$;

б) (7) $f'(x)+g'(x)<0$,

если $f(x)=x^3-24x+x^2$, $g(x)=2x^2-9$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции:

а) (6) $y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1{,}5;\ 8]$;

б) (7) $y=x^4-2x^2+3$ на отрезке $[-4;\ 3]$.

5 (7). Найдите точки максимума функции $y=-x^3+3x|x-3|$, заданной на промежутке $[0;4]$, и ее наименьшее значение на этом промежутке.

6 (1). Докажите, что для функции

$$f(x)=\frac{(1+\cos 2x)\sin x}{2}$$

справедливо неравенство

$$\min_{x\in[-\pi;\,\pi]} f(x) > -\frac{7}{18}.$$

7 (3). Известно, что уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$ имеет вид $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. В какой точке надо провести касательную к графику функции

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{18-x^2},\ 0<x<3\sqrt{2},$$

чтобы она образовывала с координатными осями треугольник наименьшей площади?

8 (3). На координатной плоскости xOy вершина A прямоугольного треугольника ABC ($\angle ABC=90^\circ$) имеет координаты $(-2;\ 0)$, вершина B лежит на отрезке $[2,\ 3]$ оси Ox, а вершина C — на параболе $y=x^2-4x+1$. Какие координаты должна иметь вершина C, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

9 (6). Найдите размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 256 м^3 такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

10 (2). Для огораживания земельного участка площадью 242 м^2, имеющего форму прямоугольника, выделено 2000 руб. С трех сторон должен быть штакетник стоимостью 25 руб. за метр, а с одной стороны — живая изгородь стоимостью 75 руб. за метр. Хватит ли отпущенных средств на устройство изгороди? Какова минимальная сумма, необходимая для этой цели?

11 (1). В прямоугольном параллелепипеде площадь основания равна 2 дм^2, а боковая поверхность 18 дм^2. При каких размерах ребер сумма длин всех ребер параллелепипеда будет наименьшей?

12 (1). Объем правильной четырехугольной пирамиды равен $\frac{1}{6\sqrt{2}}$. Пусть x — длина стороны основания и $x\in\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$. Найдите наименьшее и наибольшее значения квадрата длины апофемы данной пирамиды.

Геометрия

1 (7). Найдите площадь треугольника, если длина его основания равна a, углы при основании равны 30° и 45°.

2 (7). Биссектриса прямого угла треугольника делит его гипотенузу на отрезки, длины которых 15 и 20. Найдите площадь треугольника.

3 (7). Найдите биссектрису прямого угла прямоугольного треугольника, если длины катетов равны a и b.

4 (7). Докажите, что квадрат биссектрисы угла при одной из вершин треугольника равен разности между произведением двух сторон этого угла и произведением отрезков, на которые биссектриса делит противоположную сторону.

5 (6). В треугольник вписана окружность с радиусом 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки, длины которых 6 и 8. Найдите длины сторон треугольника.

6 (6). В треугольнике ABC биссектриса AH делит медиану BE в отношении $BK:KE=2$, а угол ACB равен 45°. Найдите отношение площади треугольника BCE к площади описанного около этого треугольника круга.

7 (5). В равнобедренном треугольнике расстояние между точками пересечения медиан и биссектрис равно 2. Определите периметр треугольника, если длина окружности, вписанной в треугольник, равна 20π.

8 (2). В треугольнике ABC высота BH делит сторону AC в отношении $AH:HC=2$, а угол HBC вдвое меньше угла BAC. Биссектриса AE угла BAC пересекается с BH в точке K. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади описанного около этого треугольника круга.

9 (5). В треугольнике ABC точки K и N — середины сторон AB и AC соответственно. Через вершину B проведена прямая, которая пересекает сторону AC в точке F, а отрезок KN — в точке L так, что $KL:LN=3:2$. Определите площадь четырехугольника $AKLF$, если площадь треугольника ABC равна 40.

10 (6). В треугольнике ABC известны высоты h_a, h_b, h_c. Найдите радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

11 (1). В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, находящейся между точками B и C, причем $CD:BC=\alpha$ ($\alpha<\frac{1}{2}$). На стороне BC между точками B и D взята точка E так, что $CD=DE$, и через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найдите отношение площадей трапеции $ACEF$ и треугольника ADC.

12 (5). На стороне NP квадрата $MNPQ$ взята точка A, на стороне PQ — точка B так, что $NA:AP=PB:BQ=2:3$. Точка L является точкой пересечения отрезков MA и NB. В каком отношении точка L делит отрезок MA?

13 (10). Дан ромб со стороной a и острым углом $60°$. На его большей диагонали как на диаметре построена окружность. а) Вычислите площадь круга. б) Что больше: площадь ромба или площадь части круга, лежащей вне ромба?

14 (6). Площадь прямоугольной трапеции равна S, а острый угол равен α. Найдите высоту трапеции, если меньшая диагональ равна большему основанию.

15 (1). Около круга с радиусом 2 описана равнобочная трапеция с площадью 20. Найдите стороны трапеции.

16 (3). В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза меньше основания AD, а продолженные боковые стороны пересекаются в точке K. Через точку O внутри треугольника BKC из вершин B и C проведены две прямые, которые пересекают CK в точке N и BK в точке M. Площади треугольников BMO, BOC и CON соответственно равны S_1, S_2 и S_3. Определите площадь трапеции $ABCD$.

17 (2). Две окружности, радиусы которых равны 3 и 8, касаются сторон угла в $60°$ и пересекаются в точках M и H. Найдите расстояния от сторон угла до точки M.

18 (2). Внутри угла в $60°$ взята точка M так, что расстояния от нее до сторон угла равны 3 и 6. Найдите радиус окружности, которая проходит через точку M и касается сторон угла.

19 (1). Через точку P, лежащую внутри круга радиусом R, проведены две взаимно перпендикулярные хорды, одна из которых образует угол α ($\alpha > 0$) с прямой, проходящей через точку P и центр круга, и удалена от центра на расстояние a. В круг вписан четырехугольник, имеющий эти хорды диагоналями. Найдите его площадь.

20 (1). Боковые ребра треугольной пирамиды $SABC$ равны b, углы при ее вершине равны следующим величинам: $ASB = ASC = \frac{\pi}{3}$, $BSC = \frac{\pi}{2}$. Найдите высоту пирамиды.

21 (2). Основание пирамиды $HABC$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC = 2BC$. Грань HBC перпендикулярна плоскости основания пирамиды, две другие грани наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите величины углов, образуемых боковыми ребрами пирамиды с плоскостью ее основания.

22 (1). Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер, причем секущая плоскость перпендикулярна боковой грани, образованной этими ребрами. Найдите отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания.

23 (4). Найдите объем правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом α и удалены от середины противоположной стороны основания на расстояние l.

24 (3). Основанием пирамиды является треугольник ABC, медиана и высота которого, выходящие из вершины B, делят угол при этой вершине на три равные части. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α, а длина медианы основания пирамиды, выходящей из вершины B, равна a. Определите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через вершину B параллельно ребру AC и наклонена к плоскости основания под углом β.

25 (7). Основание пирамиды — треугольник, две стороны которого a и b, а угол между ними $120°$. Каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите объем пирамиды.

26 (9). Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Определите площадь образовавшегося треугольного сечения, если объем пирамиды, отсеченной этой плоскостью, равен V.

27 (2). Основание пирамиды $HABCD$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$, $AB = 2AD$. Грань HAD является равнобедренным треугольником и перпендикулярна плоскости основания пирамиды, грань HBC наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите величины углов, образуемых боковыми ребрами пирамиды с плоскостью ее основания.

28 (6). Основанием пирамиды служит четырехугольник $ABCD$, диагонали которого $AC = 1$, $BD = 2$ образуют угол $30°$. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

29 (5). Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Найдите угол между диагональю AC' и прямой, соединяющей точки пересечения диагоналей граней $ABCD$ и $DD'C'C$, если известны координаты точки A $(0;\ 1;\ 1)$ и смежных с ней вершин $B(-2;\ 1;\ -1)$, $D(-1;\ 6;\ 1)$, $A'(5;\ -2;\ 3)$.

30 (7). В цилиндре параллельно его оси проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу 2α. Диагональ образованного сечения наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем цилиндра, если площадь сечения равна S.

31 (6). Диагональ осевого сечения усеченного конуса точкой пересечения диагоналей делится в отношении 2:1, считая от большего основания. Угол между диагоналями, обращенный к основаниям конуса, равен α. Длина диагонали равна l. Найдите объем усеченного конуса.

32 (4). В шар с радиусом R вписана правильная треугольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен α. Найдите сторону основания пирамиды.

33 (10). Дана четырехугольная пирамида, основанием которой является квадрат и одно из ребер которой перпендикулярно к плоскости основания. В эту пирамиду вписан куб так, что нижнее основание куба лежит на основании пирамиды, а стороны верхнего основания куба лежат на боковых гранях пирамиды. Найдите объем пирамиды, если ее боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α и ребро куба равно a.

Задачи устного экзамена

1 (8). Найдите арифметическую прогрессию, у которой сумма любого числа членов, начиная с первого, в четыре раза больше квадрата числа членов.

2 (8). Произведение четвертого и двенадцатого членов геометрической прогрессии равно 32. Найдите восьмой член этой прогрессии.

3 (6). Найдите $\log_5 3{,}38$, если $\lg 2=a$, $\lg 13=b$.

4 (6). Найдите $\log_{275}60$, если $\log_{12}5=a$, $\log_{12}11=b$.

5 (6). Сравните без помощи таблиц и калькулятора:

а) $\log_{20}75$ и $\log_8 25$;

б) $\log_{189}1323$ и $\log_{63}147$.

6 (6). Докажите, что при всех $n>1$ имеет место неравенство

$$\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+2).$$

7. Докажите, что

а) (7) $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$, если $a+b=1$;

б) (4) $3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+10\geqslant 0$

при $x>0$, $y>0$.

8 (4). Докажите тождество

$$2(\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)^2-(\sin^8 x+\cos^8 x)=1.$$

9 (7). Покажите, что из равенства $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$ следует, что $a=b=c$.

10. Решите уравнение:

а) (6) $(x-2)^4+(x+1)^4=17$;

б) (6) $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297$;

в) (7) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$;

г) (8) $x^{\log_x(x-2)^2}=9$;

д) (7) $\lg(2x-51)-\lg(22-x)=2$;

е) (7) $12-6\cos^2 x-13\sin x=0$;

ж) (8) $2\sin x+3\cos x=5$;

з) (7) $\dfrac{\cos x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}=|\cos x|$.

11. Решите неравенство:

а) (8) $\log_{x+1}(x+3)>1$;

б) (6) $\dfrac{\arcsin(x^2-x-1)}{(2x+3)^2(x+2)^3}>0$;

в) (8) $\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)>-2$;

г) (8) $|\sqrt{x^2-1}-3|\geqslant -2^x$.

12. Решите систему уравнений:

а) (7) $\begin{cases} x-y=1,\\ x^3-y^3=7;\end{cases}$ б) (8) $\begin{cases} xy=40,\\ x^{\lg y}=4.\end{cases}$

13 (8). Не решая уравнения

$$\log_{0,5}x=x+5,$$

определите количество его корней.

14 (6). Существует ли угол α такой, что

$$\sin\alpha=\cos 50^\circ+\frac{2(1+\cos 40^\circ)}{\operatorname{ctg}10^\circ-\operatorname{tg}10^\circ}\ ?$$

15 (8). Докажите, что при $x>1$

$$|\lg(x-1)|+x_2+x+9>0.$$

16 (7). Докажите, что в каждом прямоугольном треугольнике сумма квадратов медиан составляет 150 % от квадрата его гипотенузы.

17 (8). В треугольнике ABC $AB=10$, $BC=12$. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки M и K так, что $BM=4$, $BK=3$. Найдите площадь треугольника KMC, если площадь треугольника ABC равна 24.

18 (6). В треугольнике ABC угол A равен 60°, а центр вписанного круга делит биссектрису AK в отношении $(\sqrt{3}+1):\sqrt{2}$, считая от вершины A. Найдите величину углов B и C.

19 (8). Основания равнобедренной трапеции равны 3 и 12. Середина большего основания соединена с концами меньшего основания прямыми, которые пересекают диагонали трапеции в двух точках. Найдите расстояние между этими точками.

20 (8). Ромб $ABCD$ расположен над плоскостью α так, что его вершины A, B, C удалены от плоскости α соответственно на a, b и c. Найдите расстояние от вершины D до плоскости α.

Публикацию подготовил А. Егоров

Ответы, указания, решения

[redacted]анные задачи по термодинамике

1. $t_у=0\ ^\circ C$; $m_в\approx 290$ г.
2. $\Delta h\approx 20$ см; $t_у=12\ ^\circ C$.
3. $\Delta h\approx 57$ см.
4. $p_2\approx 2{,}28\cdot 10^5$ Па.

[redacted]скриминанте

1. а) $(-1;\ 1)$; б) $(2;\ 3)$;
в) $(4;\ 4;\ -4)$. Указание. При каждом фиксированном z числа x и y являются корнями уравнения
$t^2-(4-z)t+(16+z^2)/2=0$,
дискриминант которого равен $-(z+4)^2$.

г) $$\left((-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2k+n);\right.$$

$$\left.(-1)^k\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}(2k-n);\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right),$$

$$\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2k+n);\right.$$

$$\left.(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}(2k-n);\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),$$

$k,\ n\in Z$.
Указание. Приведите первое уравнение к виду $4t^2-4t\sin(x-y)+1=0$, где $t=\sin(x+y)$, и рассмотрите его дискриминант.
д) $(1/\sqrt5;\ 2;\ 0)$, $(1/\sqrt5;\ -1;\ 5)$.
Указание. Оба подкоренных выражения должны быть равны нулю. Из уравнения

$$5x^2-2\sqrt5\cos\pi y\cos\pi z+1=0$$

так же, как предыдущей задаче, следует, что либо $\cos\pi y\cos\pi z=1$, либо $\cos\pi y\cos\pi z=-1$. В первом случае $x=1/\sqrt5$, и мы приходим к уравнению

$$y^2-z^2-y+5z-2=0,$$

где y и z — целые числа одинаковой четности. (Рассматривая это уравнение как квадратное относительно y и записывая его дискриминант, получаем

$$D=4z^2-20z+9=(2z-5)^2-16.$$

Число D должно быть квадратом некоторого целого числа $m>0$. Полагая $p=2z-5$, получаем уравнение $p^2-m^2=16$, где p и m — нечетные числа. Перебирая делители числа 16, получим, что либо $p+m=8$, $p-m=2$, откуда $p=5$, $z=0$, $y=2$, либо $p+m=-2$, $p-m=-8$, т. е. $p=-5$, $z=5$, $y=-1$. Во втором случае $x=-1/\sqrt5$, и мы получаем уравнение

$$1+y^2-z^2-y+5z=0,$$

не имеющее решений, если числа y и z разной четности.
2. б) Указание. Задача может быть решена с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для шести чисел. Поступим иначе: выполнив замену $t=\sqrt x$, убедимся, что дискриминант $D(y;\ z)$ полученного квадратичного неравенства относительно t неположителен при $y>0$ и $z>0$ и обращается в нуль лишь при $y=z=1$.
3. а) $y_{\min}=-1$; б) $y_{\min}=7/23$.
4. $y\leqslant 1/4$.
5. а) $a\in(-1;\ -1/2)$; б) $a\in(-\infty;\ -3/2)\cup\cup(1+\sqrt2;\ +\infty)$.
Указание. Решается аналогично предыдущей задаче. Следует только заметить, что знаменатель дроби не может быть равен 0.
в) $[-24/5;\ 0]$.
6. $x=-\sqrt{7/5}$.
7. $-\sqrt{33}/2$.
8. $-17/48$.
9. $2\sqrt2$.
10. 3 и 1/2. Указание. Пусть $x^2-xy+y^2=a$. Выясним, при каких a система

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=a,\\ 2x^2+2xy+y^2=2\end{cases}\qquad (*)$$

имеет решения. Умножим первое уравнение на 2, второе на a и вычтем из второго уравнения первое. Получится уравнение

$$2(a-1)x^2+2(1+a)xy+(a-2)y^2=0.$$

При $a=1$ система имеет решение $(1;\ 0)$. Если $a\neq1$, то $y\neq0$, и мы можем выполнить замену $t=x/y$. Осталось выяснить, при каких значениях a имеет корни уравнение $2(a-1)t^2-2(a+1)t+a-2=0$ и убедиться, что при этих a система (*) также имеет решения.
11. $b\in(-\infty;\ -1]\cup[4;\ +\infty)$. Указание. Положив $a=b^2(b-3)^2-12+\sqrt{85}$, приходим к задаче, аналогичной предыдущей.

Задачи вступительных экзаменов по математике в различные вузы

Алгебра

1. 160/3 км/ч. Нет. 2. 12 км/ч. 3. 5/7. 4. 15/2. 5. 7 кг, 4 кг, 4 кг. 6. В первой пробирке. 7. 726. 8. 120. 9. 60 км/ч, 80 км/ч. 10. 18 ч, 24 ч. 11. 3 ч. 12. 8; (0; 8]. 13. 3,4 м/ч; (2; 4]. 14. 20 км/ч. 15. 964. 16. 1/3. 17. 1023. 18. $\pm\sqrt[4]{8}$. 19. 2; 1/2. 20. а) 9; б) 120/169; в) 2. 22. 0,5.
23. а) a/b при $a\geqslant b$; b/a при $a<b$; б) 0; в) $2(\sqrt a+\sqrt b)$. 24. $-1/\sqrt x$. 25. $\max f(x)=9/2$; $\min f(x)=2{,}5+\sqrt3$. 26. а) 7; б) 5; в) 2; г) $-8/243$; д) -1; 15; $(21\pm\sqrt{583})/3$; е) 0; 1; ж) -3; з) 25; 1/25; $\sqrt5$; $1/\sqrt5$; и) 18; к) $1+1/\sqrt3$; л) -1; 2.
27*) а) $\pm2\pi/3+2\pi k$; б) $\pi(4k-1)/4$; πk; в) $\frac{4\pi}{3}(3k\pm1)$; г) $\operatorname{arctg}2+\pi k$; $-\operatorname{arctg}\frac12+\pi k$; д) $-\pi/12+\pi k/2$, $k\geqslant-1$; е) $\pi(4k+1)/2$, $2\pi k$; ж) $\pi(4k-1)/4$, $\pi(4k+1)/8$; з) $\pi(4k+1)/16$; и) $\pi(2k+1)/4$; к) $\pi k/3$, $\pi(4k\pm1)/12$; л) $\pi(4k+$

*) Здесь и далее $k,\ n\in Z$.

$+1)/4$, $-\mathrm{arctg}\,7/4+\pi k$; м) $\pi/4$; н) $-11\pi/12$, $-7\pi/12$, $\pi/12$, $5\pi/12$; о) $\pi(4k+1)/8$, $2\pi(3k\pm\pm1)/3$; п) $\pi(4k-1)/4$, $\pi(8k+3)/24$; р) $\pi(4k+1)/2$; с) $\pi(2k+1)$; т) πk, $\pi(8k+5)/4$; у) $\pi(16k+1)/8$; ф) 1; х) 2.

28. а) $(-5; -3]\cup(1; +\infty)$; б) $(-\infty; 2\sqrt{2})\cup(2+2\sqrt{3}; +\infty)$; в) $(-\infty; -3]\cup[1; +\infty)$;
г) $(-\log_{6/5}5; 0]$;
д) $(-7; 1)$. Указание. Воспользуйтесь тем, что неравенство $|u|<v$ равносильно системе: $-v<u<v$;
е) $(-\infty; 0)\cup(2-\sqrt{2}; 1)\cup(3; 2+\sqrt{2})\cup(5; +\infty)$;
ж) $(0; 100]$; з) $[2; 3)$; и) $(3; 10/3)\cup\{6\}$;
к) $[3; 4)\cup(4; 5)\cup(5; +\infty)$; л) $(-2; -\sqrt{35}/3]\cup[\sqrt{35}/3; 2)$;
м) $[-1; 1)\cup(3; 5]$; н) $(0; 1)\cup(1; 27)$;
о) $(-1; (1-\sqrt{5})/2)\cup((1+\sqrt{5})/2; 2)$;
п) $(2; 2{,}5)$; р) $(0; 1/16)\cup(16; +\infty)$;
с) $(-\infty; -1)\cup(1{,}5; 2]$; т) $(2+\log_4 3; 4)$;
у) $(0; 1)\cup[10; +\infty)$; ф) $[-2; -1)\cup(1; 5]$;
х) $(-3/4; 0)\cup(3; +\infty)$;
ц) $(-\infty; -10\sqrt{10})\cup(-\sqrt{0{,}1}; 0)\cup(0; \sqrt{0{,}1})\cup(10\sqrt{10}; +\infty)$;
ч) $(-4/3; (3-\sqrt{17})/2)\cup((3+\sqrt{17})/2; +\infty)$;
ш) $(0{,}5; +\infty)$; щ) $\{2\}$.

29. а) $(4; -3)$; $(4; 3)$; б) $(1; 1)$, $(-2; 1)$, $(1; -2)$; в) $(2; 18)$; $(18; 2)$; г) $(1; 0)$; д) $(1; 2)$; е) $(4; -0{,}5)$;
ж) $\left(\frac{5\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+k\pi;\ \frac{5\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}-k\pi\right)$;
з) $\left(\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\left(k+\frac{n}{2}\right)\pi;\ \frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{12}+(k-n)\pi\right)$.

30. При $a<-9/4$ — решений нет; при $a=-9/4$ или при $a\geqslant4$ — два решения; при $-9/4<a<4$ — 4 решения.
31. $a\leqslant0$ и $4\leqslant a$. **32.** $(0; 2\pi n)$.
33. $a\in(-6; 3)$. **34.** $a\in[-2; -1)\cup(1; 5]$.
35. $a\in(-1; -1/\sqrt{3})\cup(1/\sqrt{3}; 1)$.
36. $b\in[-3/4; 3/4]$.
37. $x=(2-\cos2\alpha)/2$ при $-\pi/4+\pi k\leqslant\alpha\leqslant\pi/4+\pi k$.
38. $(83; 0)$, $(0; 83)$, $(-1; -84)$, $(-84; -1)$.

Анализ

1. 16. **2.** $y=-2x+4$. **3.** а) $(-\infty; 0)\cup(0; 2{,}5)$; б) $[-4; 2]$.
4. а) 0 и 28; б) 2 и 227. **5.** $x_{max}=1$, $y_{min}=-52$.
7. $(3; 2)$. **8.** $C\,(7/3; -26/9)$. **9.** $8\times8\times4$.
10. Нет; 2200 руб. **11.** $2\times1\times3$. **12.** 3/8 и 33/16.

Геометрия

1. $(\sqrt{3}-1)a^2/4$. **2.** 294. **3.** $ab\sqrt{2}/(a+b)$.
5. 13, 14, 15. **6.** $2/(5\pi)$. **7.** 108, $48\sqrt{6}$.
8. $6/(\pi\sqrt{5})$. **9.** 9.
10. $h_ah_bh_c/(h_ah_b+h_ah_c+h_bh_c)$.
11. $4(1-\alpha)$. **12.** 25/4.
13. $3\pi a^2/4$, площадь ромба меньше.
14. $\sqrt{2S\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$. **15.** 2; 5; 5; 8.
16. $3S_2(S_1+S_2)(S_2+S_3)/(S_2^2-S_1S_3)$.
17. $3(11\pm\sqrt{21})/8$. **18.** $2(3\pm\sqrt{2})$.
19. $2\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-a^2\,\mathrm{ctg}^2\alpha)}$. **20.** $b/\sqrt{2}$.
21. $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\alpha/\sqrt{5})$, $\mathrm{arctg}(2\,\mathrm{tg}\,\alpha)$.
22. $\sqrt{6}$. **23.** $2\sqrt{3}l^3/(27\sin^2\alpha\cos\alpha)$.
24. $a^2(2\,\mathrm{tg}\,\alpha-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\beta)\sqrt{3}/(4\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha)$.
25. $ab\sqrt{a^2+ab+b^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha/12$.
26. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}\sqrt[3]{V^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.
27. $\mathrm{arctg}(4\,\mathrm{tg}\,\alpha/\sqrt{17})$, $\mathrm{arctg}(4\,\mathrm{tg}\,\alpha)$.
28. 3/2. **29.** $\pi/6$.
30. $\pi S\sqrt{S\,\mathrm{ctg}\,\beta}/(4\sin^2\alpha)$.
31. $7\pi l^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}/54$.
32. $4\sqrt{3}R\,\mathrm{tg}\,\alpha/(\mathrm{tg}^2\alpha+4)$.
33. $a^3(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)^2(1+\mathrm{tg}\,\alpha)$.

Задачи устного экзамена

1. $a_1=4$, $d=8$. **2.** $\sqrt{-4}$; $\sqrt{4}$. **3.** $(a+2b-2)/(1-a)$.
4. $(a+1)/(2a+b)$. **5.** а) $\log_{30}75<3/2<\log_8 25$; б) $\log_{3^2\cdot7}7^2\cdot3^3>4/3>\log_{3^2\cdot7}3\cdot7^2$.
6. Поскольку $\log_n(n+1)=\ln(n+1)/\ln n=1+\ln(1+1/n)/\ln n$, функция $\log_n(n+1)$ убывает.
7. а) Из $a+b=1$ и $a^2+b^2\geqslant2ab$ следует, что $a^2+b^2\geqslant1/2$. Возведите полученное неравенство в квадрат. б) Выполните замену $t=(x/y+y/x)$.
9. Умножьте равенство на 2 и приведите его к виду

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0.$$

10. а) 0; 1. Выполните замену $t=x-1/2$.
б) -8; 4. Сгруппируйте первый и третий, второй и четвертый сомножители. Положите $t=x^2+4x$.
в) ±1; $\pm\sqrt{2}$; г) 5; д) $\varnothing$; е) $(-1)^n\arcsin(2/3)+\pi n$;
ж) $\varnothing$; з) $-1/2$, $\pi(4k+1)/2$.
11. а) $(0; +\infty)$; б) $[-1; (1-\sqrt{5})/2)\cup((1+\sqrt{5})/2; 2]$. в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; -1]\cup[1; +\infty)$.
12. а) $(-1; -2)$; $(2; 1)$; б) $(4; 10)$, $(10; 4)$.
13. Один корень. **14.** Нет, т. к. $\sin\alpha=2\sin40^\circ>2\sin30^\circ=1$. **17.** 7,2. **18.** 75° и 45°.
19. 2. **20.** $a+c-b$.

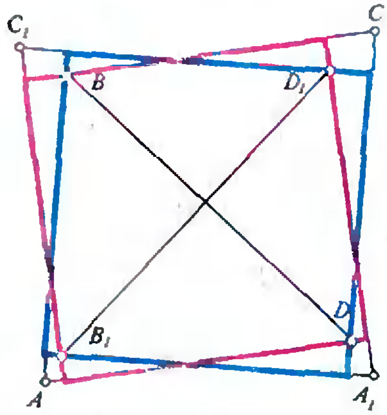


Рис. 1.

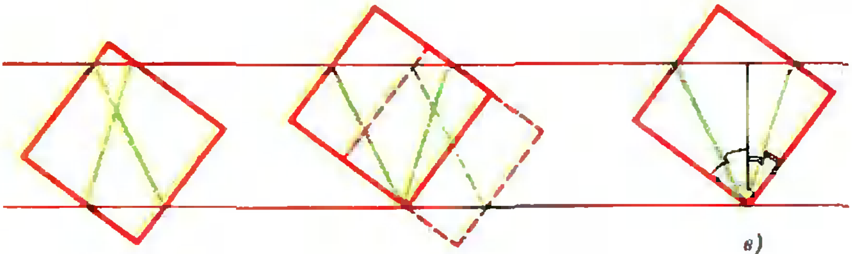


Рис. 2. а) б) в)

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 5)

1. Перестановку можно провести, например, в таком порядке: 1562437—1624537—1245637—1234567.

2. $1089 \times 9 = 9801$.

3. Пусть в ящике было x ключей, а в связках — по y ключей. Из условия следует, что $x \leqslant 3y$. После того, как одну связку положили в стол, там оказалось $x+y$ ключей и, так как их число при добавлении другой связки увеличилось не менее, чем на четверть, то можно записать $y/(x+y) \geqslant 1/4$, откуда $x \geqslant 3y$. Значит, $x=3y$. Если бы в каждой связке было одним ключом больше (т. е. $y+1$), то по условию число ключей увеличилось бы не меньше, чем на 40 %, откуда $(y+1)/(x+y+1) \geqslant 0{,}4$. А так как $x=3y$, то $(y+1)/(4y+1) \geqslant 2/5$. Из этого неравенства получаем, что $y \leqslant 1$. Но y — натуральное число, следовательно, $y=1$, а $x=3y=3$.

4. 200.

5. Рассмотрим два параллелограмма — $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 1). Стороны AB и CD перпендикулярны сторонам A_1B_1 и C_1D_1, а стороны BC и DA — сторонам B_1C_1 и D_1A_1. Кроме того, высоты этих параллелограммов соответственно равны и перпендикулярны, откуда следует, что эти параллелограммы равны и их диагонали (отрезки, указанные в задаче) перпендикулярны.

Конкурс «Математика 6—8»
(см. «Квант» № 2)

16. Передвинем квадрат параллельно одной из его сторон так, чтобы он коснулся своей вершиной границы полосы (рис. 2, *б*). Тогда углы между зелеными отрезками у этих двух квадратов будут равны, так как при сдвиге один из отрезков останется на месте, а другой параллельно передвинется. Проведем высоту полосы из рассмотренной вершины сдвинутого квадрата (рис. 2, *в*). Тогда часть квадрата, расположенная внутри полосы, разобьется этой высотой и зелеными отрезками на две пары равных треугольников. Сумма углов этих треугольников при рассматриваемой вершине равна 90°, поэтому угол между зелеными отрезками равен 45°. Отсюда следует, что угол между зелеными отрезками и на рисунке 2, *а* также равен 45°.

17. Гуссейну Гуслия достались кошельки с 5-ю и 7-ю таньга.

18. Пусть было уплачено A копеек B монетами, причем среди них было x_1 однокопеечных монет, x_2 — двухкопеечных, x_3 — пятаков, x_4 — гривенников, x_5 — двугривенных, x_6 —

АНКЕТА 6—92

Из статьи «Читатель ↔ журнал» (в этом номере) Вы узнали не только о себе, но и о том, как Ваши отзывы и пожелания помогают в подготовке журнала. Мы благодарим Вас за помощь и просим ответить на вопросы очередной анкеты. Чем больше будет ответов, тем легче нам будет ориентироваться в Ваших интересах.

Большинство вопросов традиционны, кроме одного — шестого. Отвечая на него, Вы можете рассказать, каким видите журнал, что бы Вам хотелось в нем изменить, добавить, устранить... Когда ответы будут готовы, вырежьте анкету и отправьте ее в редакцию. На конверте напишите: «Анкета 6—92».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ___

Ваша профессия (если Вы работаете): ___

Круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ___

полтинников и x_7 — рублей, т. е. $x_1+2x_2+5x_3+10x_4+20x_5+50x_6+100x_7=A$ и $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=B$. Возьмем теперь следующий набор монет: $100x_7$ — однокопеечных монет, $50x_6$ — двухкопеечных, $20x_5$ — пятаков, $10x_4$ — гривенников, $5x_3$ — двугривенных, $2x_2$ — полтинников и x_1 — рублей. Нетрудно видеть, что количество монет равно A, а соответствующая сумма равна $100B$ копеек, т. е. B рублей.

3. Какие статьи (из любого раздела) и задачи из номеров 1—6 Вам понравились (не понравились)? ____________

Вы использовали при подготовке к уроку? ____________

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ____________

5. Какая обложка из номеров 1—6 Вам понравилась (не понравилась)? ____________

6. Если бы редактором «Кванта» были Вы... ____________

Квант

Главный редактор — академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук, А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко, С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин, В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман, С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков, В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев, Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев, М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин, Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев, И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров, Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков, Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс, И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Калинин, Л. Кардасевич, С. Коновалов, А. Котова, А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, С. Лухин, Э. Назаров, П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Т. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, факс 251-55-57

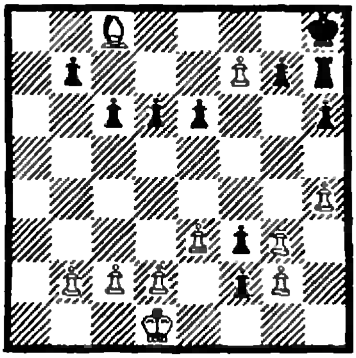
Сдано в набор 30.03.92. Подписано к печати 26.05.92. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,52. Тираж 88 566 экз. Заказ 363. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат Министерства печати и информации Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

ПУТЕШЕСТВИЕ В ПРОШЛОЕ

В этом году мы несколько «страничек» посвятим ретроградному анализу — разделу шахматной композиции, который лежит на грани между логикой, математикой и шахматами. Латинское слово «retro» означает «назад», «вспять», и именно изучение прошлого шахматной позиции составляет сущность ретроанализа. Проблема состоит не столько в выполнении определенного задания в данной позиции, сколько в выяснении вопроса, как она возникла на доске. Рассмотрим подробно одну задачу классика этого жанра композиции Н. Плаксина.



Мат в 1 ход

Кто матует? Белые — f8Ф× или черные — f1Ф×? Дать мат ничего не стоит, а вот определить, чей ход, не так просто. Проследим за процессом формирования данной позиции из начальной расстановки шахматных фигур на доске.

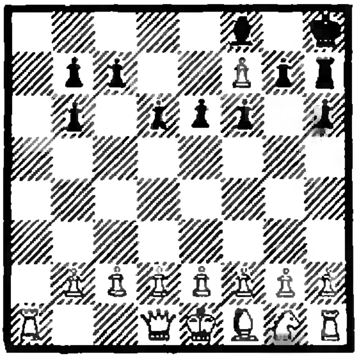
Очевидно, черная пешка f2 пришла с a7, а белая f7 — с a2. Проверим так называемый ретробаланс. Баланс белых фигур: 10 (на диаграмме) + 5 (взято — a7:b6:c5:d4:e3:f2) + 1 (Сc1 взят на поле c1 — пешки b2 и d2 на исходных местах) = 16. Баланс черных: 10 (на диаграмме) + 6 (взято — a2:b3:c4:d5:e6:f7 — на белых полях и еще f2:g3 — на черном поле) = 16. Итак, все отсутствующие фигуры (за исключением слона c1) взяты пешками.

Эстафету ретробухгалтерии принимает ретропоследовательность ходов. Поскольку *на доске все 16 пешек*, то превращенных фигур нет. Значит, белопольный слон белых c8 мог выйти со своего исходного поля f1 только после хода e2—e3. Ход этой пешкой мог быть сделан только после того, как черная пешка a7 пришла на f2. Но это могло произойти лишь после взятия f2:g3. Теперь вспомним, что белая пешка a2 идет на f7 по белым полям, а поле g3 — черное. Значит, на g3 мог быть снят только чернопольный слон. А выйти со своего исходного места на f8 он мог только после хода e7—e6. Но ход этой пешкой можно было сделать только после того, как белая пешка a2 пришла на f7. И наконец, белая пешка a2 могла прийти на f7 только после того, как черная пешка f7 сдвинулась минимум на f6.

Перед нами вырисовывается строгий план формирования исходной позиции. Вот последовательность его основных этапов: 1) черная пешка f7—f6, 2) белая пешка a2→f7 (указаны только старт и финиш маршрута), 3) черная пешка e7—e6, 4) Сf8→g3, 5) белая пешка f2:Сg3, 6) черная пешка a7→f2, 7) белая пешка e2—e3 и 8) Сf1→c8. Ни одно из звеньев этой логической цепочки нельзя переставить на другое место: если не завершен какой-то этап, то нельзя завершить и последующий. Не правда ли, эти рассуждения напоминают доказательство сложной математической теоремы?

Теперь мы можем провести окончательный анализ позиции. Стартует белая пешка a2. На трассе a2:b3:c4:d5:e6:f7 она берет ферзя, ладью, двух коней и белопольного слона черных. Но до этого черные должны были обязательно сделать по крайней мере ходы: d7—d6 (выпуская слона c8), a7:b6 (выпуская ладью a8), f7—f6 (освобождая поле f7) и еще — h7—h6, Лh8—h7 и Крe8—f7—g8—h8.

Последним ходом белой пешки «a» — e6:f7 — затягивается фигурно-пешечный ретроузел на полях h8, h7, h6, g7, f7. Черный король и ладья h7 навсегда выключаются из дальнейшей ретроигры. И только теперь *черные могут сыграть e7—e6*.



Освобожден черный слон f8, который, обретя подвижность, пока остается запертым в вольере f8—e7—d8. Надо еще сыграть или f6—f5, выводя его через f6, или c7—c6 (и еще b6—c5), выпуская через поле c7. Однако ход c7—c6 делать преждевременно, так как тогда слон f1 не сможет попасть на c8.

Итак, после хода e7—e6, продолжаем: f6—f5, Сf8→g3, f2:Сg3, и черной пешке b6 открыта дорога к пункту f2. Предварительно, конечно, еще должно быть сыграно h2—h4, чтобы вывести белую ладью h1 на диагональ c5—f2. Путешествие из прошлого продолжается — b6:c5:d4:e3:f2.

Наконец-то возможен ход e2—e3, освобождающий слона f1. Вот теперь мы пришли к так называемой критической позиции (белые: Крd1, Сf1, пешки b2, c2, d2, e2, f7, g2, g3, h4; черные: Крh8, Лh7, пешки b7, c7, d6, e6, f2, f5, g7, h6). Особенность ее в том, что у одной из сторон (у черных) остались только ходы пешками — темпоходы. Начинается темпоигра: 1. e2—e3 f5—f4 2. Сf1—b5 f4—f3 3. Сb5—d7 c7—c6! 4. Сd7—c8. Перед нами исходная позиция, ход черных, и именно они ставят мат — f2—f1Ф×!

Е. Гик

1 р. 10 к.
Индекс 70465

ГОЛОВОЛОМКА «ОЖЕРЕЛЬЕ»

Цепочка из 36 колец, изображенная на рисунке, может служить как украшением, так и головоломкой. Если повесить эту цепочку на шею, то получится симпатичное ожерелье. Это ожерелье становится головоломкой, если вы попросите кого-нибудь расположить цепочку на плоскости в виде квадрата 6×6 колец. Разумеется, сначала научитесь это делать сами.

А. Калинин